可靠度技術手冊

可靠度機率理論

彭鴻霖 編著

中華民國八十九年十二月十八日

可靠度機率理論

目 錄

1 前言 1

2 機率理論 1

2.1 事件與集合理論 2

2.2 機率之定義 2

2.2.1 一種相信的程度 3

2.2.2 古典或事前機率 3

2.2.3 相對頻率或事後機率 3

2.2.4 由定理定義 4

2.2.5 比較說明 4

2.3 基本機率定理 5

2.3.1 加法律（互斥事件） 5

2.3.2 加法律（非互斥事件） 5

2.3.3 乘法律（獨立事件） 5

2.3.4 條件機率 6

2.3.5 貝氏定理(Bayes' Theorem) 6

3 隨機變數與機率分佈 7

3.1 隨機變數 7

3.1.1 隨機變數及其特點 7

3.1.2 隨機變數的分類 8

3.2 次數分佈與機率密度函數 8

3.2.1 次數分佈 8

3.2.2 機率分佈函數 9

3.2.3 斷續型隨機變數的機率密度函數 9

3.2.4 連續型隨機變數的機率分佈 9

3.3 累積分佈函數 10

3.4 機率分佈參數 10

3.4.1 位置參數 11

3.4.2 尺度參數 11

3.4.3 形狀參數 11

3.5 數學期望值 11

3.6 機率分佈的集中趨勢和分散性 12

3.6.1 集中趨勢的尺度 12

3.6.2 分散性的尺度 13

4 可靠度理論 14

4.1 失效機率密度函數 14

4.2 失效累積分佈函數 15

4.3 可靠度函數 15

4.4 失效率函數 15

4.5 浴缸曲線 17
4.6 特徵壽命 18
4.6.1 平均壽命 18
4.6.2 中位壽命 18
4.6.3 平均任務時間 18
4.6.4 可靠壽命 19
4.6.5 指數分佈產品特徵壽命 19
5 維護度理論 20
6 可靠度/維護度分析常用之機率分佈 21
6.1 常態分佈 23
6.1.1 機率密度函數與累積分佈函數 23
6.1.2 數學期望值 23
6.1.3 特性描述 24
6.1.4 應用說明 26
6.2 對數常態分佈 26
6.2.1 機率密度函數與累積分佈函數 26
6.2.2 數學期望值 26
6.2.3 特性描述 27
6.2.4 應用說明 27
6.3 指數分佈 27
6.3.1 機率密度函數與累積分佈函數 27
6.3.2 特性描述 29
6.3.3 應用說明 30
6.4 韋伯分佈 30
6.4.1 機率密度函數與累積分佈函數 30
6.4.2 數學期望值 31
6.4.3 特性描述 31
6.4.4 應用說明 31
6.5 伽瑪分佈 33
6.5.1 機率密度函數與累積分佈函數 33
6.5.2 數學期望值 34
6.5.3 特性描述 34
6.5.4 應用說明 34
6.6 二項分佈的特徵與應用 34
6.6.1 機率密度函數與累積分佈函數 34
6.6.2 數學期望值 36
6.6.3 特性描述 36
6.6.4 應用說明 36
6.7 波桑分佈 37
6.7.1 機率密度函數與累積分佈函數 37
6.7.2 數學期望值 37
6.7.3 特性描述 37
6.7.4 應用說明 39

7 可用度理論 39
7.1 基本概念 39
7.2 可用度模型的建立 40
7.2.1 概述 40
7.2.2 單台設備可用度分析 41
7.3 可用度和可靠度與維護度之關係 43
參考文獻 44

1 前言

實際生活中的每一個現象都具有相當程度的不確定性或隨機性，裝備的可靠度與壽命自然也不例外。這種不確定特性的意義是，當要我們要用定量的方式表示或描述這種現象時，我們無法說出其正確的數值。在可靠度工作在使用定量的方式描述或討論產品可靠度時，可將其構成組件的可靠度視為事件，然後根據這些事件的機率特性求得產品的可靠度，亦可針對產品的特性及可靠度定義直接以機率理論加以說明。可靠度函數為說明可靠度隨時間變化關係的數學式，由此一關係可推導出物品壽命或失效時間的機率分佈函數，失效率函數則表示失效率與時間的關係。可靠度函數用於表示壽命數據、品質特性、應力、維護時間等與可靠度有關的特性的機率分佈情形，具有各種形式。因此，分析各種機率分佈的形狀與特色，不但可以瞭解與可靠度相關的現象的機率性質，進而掌握其所代表問題的本質。本報告首先回顧機率理論，說明機率的概念、基本機率定理；其次討論機率分佈函數及其特徵量；最後就常態、對數常態、指數、韋伯、伽瑪、二項及波桑等可靠度工程技術常用的機率分佈，簡要說明其機率密度函數、累積分佈函數、可靠度函數、失效率函數、期望值等各項特性。

2 機率理論

實際生活中的每一個現象都具有相當程度的不確定性(uncertainty)或隨機性(randomness)，例如大氣溫度的變化、材料的強度、甚至於裝備的壽限，這種不確定特性的意義是，當要我們要用定量的方式表示或描述這種現象時，我們無法說出其正確的數值。在可靠度工作中，同樣有要用量化的數值來描述或處理相關的問題，不過無論是敘述物品本身或其構成組件的可靠度特徵值、或是說明影響可靠度特性的各種因素，也都是具有不確定性的問題。另外，這些可靠度特性的實際觀測數值，通常也只能以確定性較低的數值加以說明，事實上這也是大部份近代工程的趨勢與特色。因此，在解決可靠度問題時，通常需要利用機率與統計等數學理論，將數量化的物品可靠度或其他相關特性視為隨機變數(random variable)，代替傳統上以確定變數(deterministic variable)表示的作法，並且使用機率性手法處理或解決所遭遇的工程問題，這在目前已是相當普遍廣泛的事情。例如，某一型式的電晶體，其平均失效率為每千萬小時 1 次 ($1\ \mathrm{fr}/10^7\ \mathrm{hr}$)，假定某一件裝備使用了 1,000 個這種電晶體，在將此裝備實際操作 100 小時中，雖然我們無法確定此一裝備在操作使用 100 小時之後是否一定會發生失效，但是我們應該可以知識與經驗，預測或敘述其失效的發生機率，或是在指定的信賴水準(confidence level)下，根據觀測數據來計算推論失效機率是介於某一上下信賴界限之間的一定數值。不論是何種說明方式，都需要使用機率分佈函數(probability distribution function)來敘述失效的可能性。機率分佈函數係由隨機變數及數個參數(parameters)與常數(constants)所組成，用來表示具有不確定性的問題事件，其中參數代表著物品的特性。因此，已知描述產品可靠度特性的隨機變數的機率分佈或其參數，即可由任務資訊求得產品可靠度值。

在使用定量的方式描述或討論產品可靠度時，可將其構成組件的可靠度視為事件，然後根據這些事件的機率特性求得產品的可靠度，亦可針對產品的特性及可靠度定義直接以機率理論加以說明。可靠度函數為說明可靠度隨時間變化關係的數學式，由此一關係可推導出物品壽命或失效時間的機率分佈函數，失效率函數則表示失效率與時間的關係。可靠度函數用於表示壽命數據、品質特性、應力、維護時間等與可靠

度有關的特性的機率分佈情形，具有各種形式。因此，分析各種機率分佈的形狀與特色，不但可以瞭解與可靠度相關的現象的機率性質，進而掌握其所代表問題的本質。

2.1 事件與集合理論

機率理論是描述具不確定性或出現機會現象的數學方法，要解決這些問題首先定義事件(event)、實驗(experiment)和觀測值(realization)三個名詞。事件表示某種輸出結果的現象，假如輸出結果具有不確定性且無法正確預知，則稱此種現象為隨機事件(random event)；實驗為瞭解事件輸出結果而執行的動作，例如投擲一個硬幣或骰子；觀測值則表示單一實驗的輸出結果，對於隨機事件所做的實驗，其觀測值可能會有好幾種結果。為方便起見，在後續討論機率理論時將隨機事件簡稱為事件。

如前所述，對於特定事件所作的實驗，觀測值可能是斷續的(discrete)、也可能是連續的(continuous)，其觀測值可能有好幾種結果，觀測結果可能是有限的、也可能是無限的，這些結果稱為樣本空間(sample space)。假如事件包含了樣本空間的所有樣本點，則稱此一事件為肯定事件(certain event)；反之，事件不包含任何樣本點，則稱為不可能事件(impossible event)。

實驗的觀測結果，亦即輸出結果事件，有的彼此之間有著某種程度的關係，有的則可能會互相排除對方發生的可能，對於具有這種關係的事件稱為互斥事件(mutually exclusive events)，也就是說，這些事件不可能同時發生；假如事件不會影響彼此的發生，則稱為獨立事件(independent event)；有的事件之間會彼此互相影響其結果，稱為相依事件(dependent event)，這些關係可以集合理論(set theory)來說明之。集合(set)為具有明確定義的物件(objects)的集合體，也就是說，對於任何一物件，我們可以確定它屬於或不屬於這個集合。構成集合的基本物件稱為元素(elements)，包括所有元素的集合稱為宇集合(universal set)，不包含任何元素的集合稱為空集合(empty set or null set)。對於可以由其他事件組合或推衍而得到的事件，可以透過聯集(union)與交集(intersection)等集合的基本運算定理而得到。

假設有 E_1 和 E_2 兩事件，其聯集以 $E_1 \cup E_2$ 表示，所代表意義為 E_1 或 E_2 事件個別發生，或 E_1 和 E_2 同時發生，兩種情況均屬於聯集事件 $E_1 \cup E_2$，亦即事件 $E_1 \cup E_2$ 包含了所有屬於 E_1 和 E_2 的樣本點。

事件 E_1 和 E_2 的交集常用 $E_1 \cap E_2$ 表示，代表 E_1 和 E_2 同時發生的事件，亦即 $E_1 \cap E_2$ 包含的所有樣本點必須是同時屬於事件 E_1 和 E_2。

2.2 機率之定義

任何一事件均有發生的可能性，以定量表示此種可能性的數值一般稱之為機率(probability)。機率的範圍一定是在 0~1 之間，零機率表示事件絕不會發生，機率為 1 時則表示該事件一定會發生。機率的定義有很多種，從最早的公式到現代的表示方法，研究分析這些定義的發展過程，可以瞭解機率的概念，如此在應用時才能掌握其用法與限制。關於機率的定義依發展的時機次序有下列四種方式：

(1). 一種相信的程度；

(2). 古典或事前機率；.

(3). 相對頻率或事後機率；

(4). 由定律定義。

2.2.1 一種相信的程度

一件事件的機率值有時候是根據評價者本身的判斷力而定，例如，當某人說：「我幾乎可以確定她懷的是男的」，表示經判斷結果該婦女懷孕是男的機率相當高，或者說她懷的男孩的機會遠大於女孩。另外一個例子，假如某人說：「我們可以登陸火星」，他的意思是說人類登陸火星的機會很大。這兩個例子的共同點是對於所討論的事件都認為機率很高，但是此一數值並不是經過正確的計算方法所決定的，而是一種相信程度的判斷。

雖然這種度量機率的方法是一般人所常用的，顯然然它並不能夠解決現代的各種物理問題。然而，不可否認的，許多理論或經驗問題，基本上都是數學家或科學家執著地「相信」有答案而獲得解決的。

2.2.2 古典或事前機率

在一特定狀況下具有特性 A 的事件發生過 n 次，而在此特定狀況下所有出現的結果總數為 N，假設每一種可能出現結果的機會相等，則事件 A 發生的機率，記為 P(A)，可以用下列比值來表示：

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{1}$$

由上面的定義敘述可知，事件 A 可能發生的次 n 和出現機會相等的總發生次數 N，在本質上屬於「事前」的，也就是說並不是實際執行實驗而獲得的。

例如：投擲一枚公平的標準硬幣時，出現正面的機率為 1/2；同樣地，投擲一只公平的骰子，得到 1~6 個數字中任何一個數字的機率為 1/6；52 張撲克牌中，抽到方塊的機率為 13/52＝1/4。其中特別強調「公平」的目的主要在說明這些事件都是獨立事件具有相等的出現機會，亦即硬幣、骰子和撲克牌均無記憶能力。因此，在過去出現的情況並不會影響到下一次事件出現的機率。在理想狀況下，沒有任何一個系統會違背此一原則與結果，一個在輪盤賭檯前的賭徒一般都認為「在等候黑點出現後下注紅點據說會贏」，那是因為只有贏的人才會講出，而大多數都是屬於默默無語的輸家。

對於「公正的」硬幣、骰子及輪盤而言，我們可以依據系統的常態本性預測每一事件出現的機率。硬幣有正反兩面、骰子有六面、輪盤上則具有相等的紅黑兩種數字。假設硬幣、骰子及輪盤的構造都是公正均勻的，則每一事件的出現結果將是無偏的，亦即所有的事件出現的機率完全相同，也可以說這些事件是屬於隨機性的。

2.2.3 相對頻率或事後機率

在古典機率定義中，特別注意的是假設同一狀況下的所有結果出現機會都相等，現若投擲兩枚硬幣，想知道出現兩個正面的機率。直覺上，投擲兩枚硬幣有三種可能，亦即：兩個正面、一正一反、和兩個反面，根據古典機率定義，兩個都是正面的機率可能為 1/3。然而，這種推理並不正確，因為每一種結果出現的可能並不相等。換句說，一旦每一種結果出現的機會不儘相等時，則古典機率的定義就有其應用上的限

制。另外，對於可能結果為無窮多種的物理現象，古典機率定義也無法用來度量特定事件發生的機率，因而產生了機率的第三種定義，相對頻率或事後機率。

此一定義是由 R. Von Misses 在 1936 年所發展出來的。此一定義假設 N 為對所討論的問題所進行的實驗次數，n 為事件 A 發生的次數，其中所做實驗都是在完全相同的狀況下進行。當 N 值很大，則事件 A 的機率接近於 n/N，即：

$$P(A) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{n}{N}\right) \tag{2}$$

由式(2)中的極限觀念可知，這種定義的應用科技問題不宜太昂貴，否則將因沒有足夠的 N 值，無法獲得 n/N 的極限值，而影響機率的評估結果。

2.2.4 由定理定義

對於一定數目或可數無限數目的樣本空間 S，每一個樣本空間的次集合都是事件，假如樣本空間包含有 n 個樣本數，則樣本空間 S 中有 2^n 個可能事件。假設事件 S_i(i＝1,2,⋯,n,⋯)，若 $P(S_i)$滿足下列三個定理：

定理一：$0 \leqq P(S_i)$；

定理二：P(S)＝1；

定理三：若 S_1、S_2、⋯、S_n、⋯為互斥事件序列，亦即

$$S_i \cap S_j = \phi, i \neq j = 1,2,\cdots,n,\cdots$$

且

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n \cup \cdots) = P(S_1) + P(S_2) + \cdots + P(S_n) + \cdots$$

或

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$$

則稱 $P(S_i)$為事件 S_i 的機率。若樣本空間 S 中每一事件的機率都可以決定，則稱 S 為機率空間。

基本上，上述三個定理並沒有對事件賦與數值，主要是用來處理複合事件的機率，使之可以用簡單事件的機率表示，換言之，機率的數值須應用其他定義方法來評估，其中最常使用的是古典定義法。

2.2.5 比較說明

根據古典機率定義，如投擲骰子，是屬於機會相等的獨立事件；事後機率定義則涵蓋所有品質管制與可靠度問題，例如測試 100 個組件，結果其中有 30 個屬於不良品，我們應該有足夠的理由可以確定，在下次測試時，發現不良品的機率將為 0.30 或 30%。不過在做此一結論時必須十分小心謹慎，所謂在下次試驗發現不良品的機率將為 0.30 時，可能是在樣本數量限制下對於此一事件會發生的相信程度，如此又導出有關

機率的具有主觀特色的另一種定義，這種定義是將第三個定理引伸至考量互相有關聯的相依事件，其相對的機率為條件機率，因此衍生出所謂的貝氏機率。例如，有 100 個產品進行試驗，每 10 個產品為一批，如果在某一特定批中發現有 7 個不良品，我們會採取改正行動以改善製程，這種問題批以後不太可能再度發生，因此我們可以認定下一個產品為不良的機率較低，這種主觀方式相當合理，對於品質管制與可靠度方面通常亦頗為必要。

2.3 基本機率定理

由機率的各種定義及樣本空間中各種事件組合的邏輯關係，可以得到下列在機率應用上的基本定理。

2.3.1 加法律（互斥事件）

有 A、B 兩事件，事件 A 發生的機率為 P(A)，事件 B 發生的機率為 P(B)。若兩事件為互斥事件，亦即兩個事件不會同時發生，則兩個事件之一發生的機率為兩個事件個別發生機率之和，亦即：

$$p(A\,or\,B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{3}$$

同理，可應用至 N 個互斥事件中任何一個事件發生的機率：

$$P(A \cup B \cup \cdots \cup N) = P(A) + P(B) + \cdots P(N) + \cdots \tag{4}$$

2.3.2 加法律（非互斥事件）

若 A、B 為非互斥事件，則 A 或 B 發生的可能性為兩者個別發生或同時發生，亦即至少有一個發生，則 A 或 B 發生的機率為：

$$P(A\,or\,B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{5}$$

上式可應用至 3 個事件之情形：

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{6}$$

2.3.3 乘法律（獨立事件）

若 A、B 為獨立事件，亦即一個事件的發生不會影響到另一個事件的發生機率，則 A、B 兩事件同時發生的機率為個別發生機率的乘積：

$$P(A\,and\,B) = P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{7}$$

同理，可應用至N個獨立事件同時發生的機率：

$$P(A \cap B \cap \cdots \cap N) = P(A)P(B) \cdots P(N) \tag{8}$$

2.3.4 條件機率

若事件 A、B 為非獨立事件，亦即一個事件的發生會影響到另一個事件的發生機率，此為條件機率問題。一般而言，在事件 B 發生的條件下事件 A 發生的機率稱為 P(A|B)，同理，在事件 A 發生的條件下事件 B 發生的機率稱為 P(B|A)。因此，當事件 A 和事件 B 不是獨立事件時，事件 A、事件 B 兩者同時發生的機率為：

$$p(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \tag{9}$$

若事件 A 和事件 B 互為獨立事件，則：

$$p(A \mid B) = P(A) \tag{10a}$$

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{10b}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{10c}$$

對於 A、B 及 C 三個事件的情形，其關係則為：

$$p(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A, B) \tag{11}$$

2.3.5 貝氏定理(Bayes' Theorem)

貝氏定理係在十八世紀由英人 Reverend Thomas Bayes 所發現而命名的定理，後來經過 Laplace 加以補充而成為今日通用的形式。貝氏定理為條件機率的應用，根據機率理論，當事件 B 已經發生時，則任何出現在事件 B 以外的事件的機率為零，亦即整個機率問題的樣本空間為事件 B,

因此，事件 A 發生的機率為：

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{12}$$

因此,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) \tag{13}$$

如改用 P(B|A)表示，可得：

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \tag{14}$$

將上式代入條件機率 P(A|B)中，得

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} \tag{15}$$

此即為有名之貝氏定理，式中 P(A)為在未瞭解事件 B 之前事件 A 發生的機率，又稱為事前機率(a priori probability)，P(A|B)為已知事件 B 發生的情況後，A 發生的機率，又稱為事後機率(a posteriori probability)。P(B|A)稱為概似函數(likelihood function)，P(B)為使事後機率常態化常數，又稱為全機率(total probability)。

若樣本空間 S 中有 k 個互斥事件 S_i，B 為樣本空間中的一個事件，亦即：

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \tag{16}$$

同時,

$$B \cap S = B \tag{17}$$

因此,

$$\begin{aligned} B &= B \cap S = B \cap \left(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k\right) \\ &= \left(B \cap S_1\right) \cup \left(B \cap S_2\right) \cup \cdots \cup \left(B \cap S_k\right) \end{aligned} \tag{18}$$

所以事件 B 發生的全機率為：

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap S_1) + P(B \cap S_2) + \cdots + P(B \cap S_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B \cap S_i) \end{aligned} \tag{19a}$$

$$P(B \cap S_i) = P(S_i)P(B \mid S_i) \tag{19b}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(S_i)P(B \cap S_i) \tag{19c}$$

得到 k 事件的貝氏定理為：

$$\begin{aligned} P(S_m \mid B) &= \frac{P(S_m)P(B \mid S_m)}{P(B)} \\ &= \frac{P(S_m)P(B \mid S_m)}{\sum_{i=1}^{k} P(S_i)P(B \mid \cap S_m)} \end{aligned} \tag{20}$$

3 隨機變數與機率分佈

3.1 隨機變數

3.1.1 隨機變數及其特點

某種現象的發生結果可用數字來代表而加以分辨，如果變數的數值與隨機現象的觀測結果有關，也就是說，可用某個函數來表示一個事件或一個結果，這個函數便是隨機變數，隨機變數可對應某一數值，或以某一些數值代表某一些不同的事件。隨機變數具有以下兩個特點：一是其觀測數據由於受無法控制的隨機因素的影響，所以在進行觀測之前只知其數值的可能範圍，不能預知其確切數值；二是由於隨機觀測的各個結果有一定的出現機率，所以，隨機變數的數值也一定是機率。在書寫習慣上，一般以大寫字母如 X、Y、…表示隨機變數，以小寫字母表示該隨機變數的觀測值，大寫 P 表示機率，小寫 p 表示機率值。

例如，盒中裝有標號 1、2、3、4、5 的五個籤，從中任抽一個，抽得號碼 X 是隨著觀測結果不同而變化。在觀測前只知 X 的數值範圍，不能預知其確切數值。但不論抽取到何一數值，其中任一取值的機率均為 1/5，所以 X 是隨機變數。

再如，從一批同一型號的滾動軸承中任抽取一個，求在一定條件下的工作壽命 T，在試驗前(使失效前)只能知道其取值範圍(T>0)，不能預知其壽命大小，可是經過多次試驗，可以知道 T 的取值有一定的規律，故 T 也是隨機變數。

3.1.2 隨機變數的分類

根據隨機變數的觀測值情況分為斷續型隨機變數與連續型隨機變數兩類。若隨機變數的全部觀測值為有限個或可數無限個(例如所有的正整數)，則稱這種隨機變數為斷續型或分立型隨機變數(discrete random variable)，前述抽籤號碼 X 就是斷續型隨機變數的例子。若隨機變數可以在某個區間內任意觀測其數值，則稱這種隨機變數為連續型隨機變數(continuous random variable)，例如前述滾動軸承壽命 T 就是連續型隨機變數。連續型隨機變數的觀測值通常是可數的數字，因此又稱為計量型數據(variable data)；而斷續型隨機變數的觀測值只能根據其有限的屬性(attribute)而加以區別，因此又稱為計數型數據(attribute data)。

3.2 次數分佈與機率密度函數

3.2.1 次數分佈

實務上，所有物品的特性或其相關現象，例如機製件的直徑或電晶體的增益係數，或多或少都含有相當程度的的不確定性，有就是說在不同時間對同一特性所觀測得的數據可能不盡相同，當數據累積增多時，我們可以將量測數據與相對出現的次數或以總數加以權重的頻度(frequency)繪製成直方圖(histogram)，所有的數值會在平均值上下變化，典型的樣本數據如圖 1 所示，在本例題中有 30 件物品進行量測，圖 1.(a)所顯示的是這些量測數據出現的次數，量測得數據的範圍為 2 至 9，而大部物品的數值則在 5 值 7 之間。由相同的群體另外選取 30 個樣本通常會產生不同的直方圖，但是其一般的形狀大致上則是很相似的，如圖 1(b)。如果我們將許多這樣的樣本數據合併在一起，並且以 0.5 作為量測數據的間隔繪製成一個直方圖，如圖 1(c)所示，同時注意在此一圖形是以次數的百分比為縱軸尺度，此時我們所獲得的圖形更能代表數據的分佈。

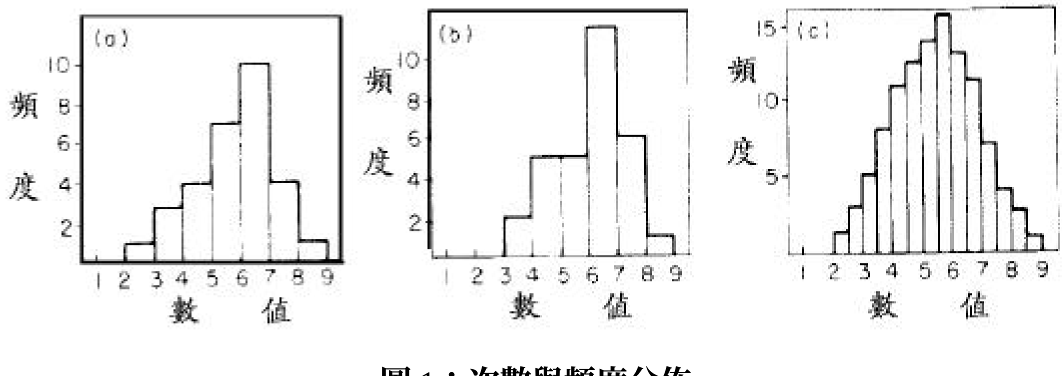


圖 1：次數與頻度分佈

3.2.2 機率分佈函數

假如繼續量測更多的數據，當數據增加至無限多個時，並且更進一步的減小量測數據的間隔使直方圖的階寬則變得無限小，此時直方圖會趨近於一條連續的曲線，此一曲線說明群體中每一隨機數據的機率分佈情形。由上例可知，機率分佈函數可由有限個數據，利用直方圖推定得。

3.2.3 斷續型隨機變數的機率密度函數

若隨機變數為斷續型，則其相對應之機率分佈稱為斷續型機率分佈。斷續型隨機變數可以用列表法表示隨機變數的機率分佈，即

$$X : x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots \tag{21}$$

$$P : p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots$$

其中$0 \le p_i \le 1$，且

$$\sum_{i=1} p_i = 1$$

這種數表稱為斷續型隨機變數的機率分佈表，它清楚而完整地表示了斷續型隨機變數 X 觀測值的機率分佈規律。

斷續型隨機變數的機率分佈也可直接用一組等式表示，即

$$p_i = \Pr\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots \tag{22}$$

上式為斷續型隨機變數 X 的機率分佈數學表達式，一般稱為機率質量函數(probability mass function, pmf)，主要是取物理學中質量的意義。

3.2.4 連續型隨機變數的機率分佈

考慮連續型隨機變數(continuous random variable)X，如圖 1 所示之機率分佈直方圖，當$n \to \infty$，組距$\Delta X \to 0$時，直方圖的階梯就趨於平滑的曲線。$f_X(x)$稱為連續型隨機變數 X 的機率密度函數(probability density function, pdf)，是為隨機變數之函數，此一函數定義隨機變數出現在 x 與(x＋dx)之間的機率或比率為 $f_X(x)\,dx$，亦即：

$$p(x < X < x + dx) = f_X(x)dx \tag{23}$$

對於連續型隨機變數而言，機率密度圖中一點的機率為零，即：

$$P(X = x) = 0$$

又 $f_X(x)$本身為一正值，即：

$$f_X(x) \ge 0$$

機率密度函數表示連續型隨機變數的機率分佈， $f_X(x)$ **曲線與** x **軸間的面積代表機率，根據機率理論，若將** $f_X(x)dx$ **對** X **的所有領域**(domain) $[-\infty, +\infty]$ **範圍積分，所得到的總面積結果應為** 1**，亦即：**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \tag{24}$$

3.3 累積分佈函數

假設 X **是一個隨機變數，其觀測值的機率規律稱為隨機變數** X **的機率分佈，記為** $F_X(x)$**，代表隨機變數** X **等於或小於某一特定觀測值** x **的機率，規定如下：**

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)d\xi \tag{25}$$

$$f_X(x) = F_X\ (x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{26}$$

由上式可知,

$$\begin{aligned} P(x_1 \le X \le x_2) &= \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)dx \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \end{aligned} \tag{27}$$

$$R(x) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{\infty} f_X(\xi)d\xi \tag{28}$$

上式中 $F_X(x)$ **又稱為累積分佈函數**(Cumulative Distribution Function, CDF)**，或簡單稱之為機率函數**(probability function)。

3.4 機率分佈參數

如前所述，對於具有不確定性因素的事件、過程或輸出的數據，我們通常是以隨機變數來表示，而每一個隨機變數都可以用分佈函數來描述隨機變數中任何一選定數值的機率行為。在數學上，函數是由一些變數(variables)、**參數**(parameters)、**常數**(constants)**，以及加、減、乘、除、積分、微分等數學運算子所構成的。例如：**

$$f_X(x) = f_X(x; a, b, c, \cdots)$$

其中 x **為隨機變數，** a、b、c **等為參數。機率分佈的參數主要是說明事件、過程或輸出數據的機率性行為，一旦確定機率分佈函數的參數之後，隨機變數領域中任何一個數值的發生機率均可經由機率分佈函數計算得。**

一般機率分佈函數常見的參數有位置參數(location parameter)、**尺度參數**(scale parameter)**及形狀參數**(shape parameter)**等三種，這三種參數之意義與特性分別說明如下。**

3.4.1 位置參數

位置參數，一般記為ζ，顧名思義，直觀上與隨機變數具有加或減的關係，亦即以$x-\zeta$或$x+\zeta$的方式出現在機率分佈函數中。位置參數有兩種可能情況，一為表示機率分佈的開始點，在此點左方時，$f_X(x)=0$；另一種是表示分佈的隨機變數值在橫座標的位置。前者如三參數韋伯分佈及二參數指數分佈，後者如常態分佈。並非所有的分佈都有位置參數，例如瑞雷分佈就沒有位置參數。

3.4.2 尺度參數

尺度參數，一般記為η，與隨機變數為乘或除的關係，亦即以x/η或ηx的方式出現在機率分佈函數中。尺度參數的作用是改變橫座標的尺度，當η增減時，分佈即被從啟始點或中心點壓縮變高瘦或放鬆變矮胖。尺度參數並不會改變分佈的歪度，例如韋伯分佈的歪度即與尺度參數η和位置參數ζ無關，常態分佈的尺度參數為σ，指數分佈的尺度參數為λ。

3.4.3 形狀參數

形狀參數，一般記為 m，與隨機變數為冪次方或開次方的關係，亦即以x^m或m^x的方式出現在機率分佈函數中。形狀參數因控制機率分佈的形狀而得名，例如韋伯分佈$0<m<1$時，$f_X(x=0)=\infty$，當 x 增大時漸減至$f_X(x=\infty)=0$；若$m>1$，則$f_X(x=0)=0$，當 x 增大時$f_X(x)$漸增，直到某一峰值(亦即眾數)之後，$f_X(x)$反又隨著 x 的增大而減小。並不是所有的機率分佈都有形狀參數，例如常態分佈和指數分佈，這表示這種分佈只有一種形狀；而對數常態分佈的標準差為其形狀參數。

3.5 數學期望值

設有一隨機變數 X 的函數 g(X)，其數學期望值，記為$E[g(X)]$。當 X 為斷續型隨機變數時，設其機率質量函數為$p_X(x)$，則其數學期望值之定義為：

$$E[g(X)]=\sum_{\text{all}\,x_i} x_i\, p_X(x_i) \tag{29}$$

同樣，若X為連續型隨機變數，則其數學期望值可由已知機率密度函數$f_X(x)$，則其期望值之定義為：

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx \tag{30}$$

例如，當$g(X)=X$，其期望值為：

$$E[g(X)]=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{31}$$

而$g(X)=X^2$之期望值為：

$$E[g(X)] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \tag{32}$$

3.6 機率分佈的集中趨勢和分散性

機率分佈函數雖可完整地描述隨機變數的不確定特性，但求機率分佈函數往往並不是一件容易的事，有時可就某些方面對機率分佈進行描述，如用一個或幾個數值來部份描述機率分佈的性質，這種數值稱為隨機變數機率分佈的數值特徵。

3.6.1 集中趨勢的尺度

集中趨勢的意思是指機率分佈密度的圖形集中的趨向，即表示機率分佈的中心位置，其尺度常用平均值(mean)或中位數(median)表示，有時也用眾數(mode)表示，茲分述如下。

(1). 平均值

表示分佈的集中趨勢最常見的即為平均值，一般記為$\bar{x}$。此值並非簡單算術平均值，而是各取值(代表值)以其機率為加權係數的加權算術平均值，這種加權算術平均值一般是以數學上的期望值為其表達式，斷續型隨機變數與連續型隨機變數之平均值分別說明如下：

設 X 為斷續型隨機變數，其機率分佈為：

$$\begin{aligned} X &= x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots \\ p &= p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots \end{aligned} \tag{33}$$

則平均值表達式為：

$$\bar{x} = \mu_X = E[X] = \sum_{\text{alli}} x_i p_i \tag{34}$$

式中：μ_X = X 的平均值；

E[X]= 隨機變數 X 的數學期望值。

對於連續型隨機變數 X，其機率密度函數為 $f_X(x)$，則式(35)中的 p_i 代之以 $f_X(x)dx$，並將求和改為積分，則得：

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{35}$$

(2). 中位數

中位數是機率密度函數圖的中間值，中位數兩邊面積(即機率)各為 0.5，一般記為 $\tilde{x}$ 或 $x_{0.5}$。若有一組(nT)觀測值，按大小次序排列，如 n 為奇數，則居中的數為中位數；如 n 為偶數，則居中的兩個數的算術平均值為中位數，例如 6 個觀測值按大小排列為 3、4、4、6、7、9，則中位數為 5。

(3). 眾數

眾數為出現頻度(或頻數)最大的隨機變數，一般記為 $\hat{x}$。因此，對於斷續型隨機變數，觀測值出現最多的數為眾數，例如前述 6 個數的情況，眾數為 4。對於連續型隨機變數，眾數是使得機率密度函數為極大的 x 值，即機率密度函數高峰所對應的 x 值。

分佈為對稱型的隨機變數，平均值、中位數和眾數三者是一致的，如果分佈不是對稱型，則三者就不一致了。在可靠度研究中，常遇到不對稱型的分佈，因此，要注意它們之間的區別。

3.6.2 分散性的尺度

分散性(dispersion)是指分佈的離散程度，其衡量尺度常用變異數、標準差、變異係數和極差表示，分述如下。

(1). 變異數

變異數為表示分佈分散性的尺度，記為 $\sigma_X{}^2$。對於斷續型隨機變數，變異數的一般表達式為：

$$\sigma_X{}^2 = V[X] = \sum_{\mathrm{all}\,i} (x_i - \mu_X)^2 p_i \tag{36}$$

對於連續型隨機變數，變異數的一般表達式為：

$$\sigma_X{}^2 = V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_X)^2 f_X(x) dx \tag{37}$$

式中 V 為一種作用於隨機變數 X 運算符號，藉以求得變異數值。上式中取各觀測值與平均值差的平方，這是因為各個差值有正、負之分，平方可消除正負的影響，否則平均值為零。

(2). 標準差

變異數的單位是隨機變數單位的平方，為了與隨機變數的單位一致，常用變異數的平方根作為分散性的尺度，即：

$$\sigma_X = \sqrt{V[X]} \tag{38}$$

上式中的 σ_X 稱為隨機變數 X 的標準差，一般而言，假設不同的隨機變數具有同一平均值 μ_X，則標準差者越大，則表示其分散性越大。

(3). 變異係數

變異係數為標準差與平均值之比，即：

$$C_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \tag{39}$$

式中 C_X 為變異係數，用它來衡量分佈的分散性，這是一個相對的分散性尺度，顯然變異係數是無因次的，其值越小越好，及分散性越小。

(4). 極差範圍

極差範圍(range) R_X 是觀測值中最大值 x_{max} 與最小值 x_{min} 之差值，即

$$R_X = x_{max} - x_{min} \tag{40}$$

例如前述起動次數為 410~430 次，則極差範圍 $R_X = 430 - 410 = 20$ 。極差範圍反映實際情況比較粗略，故一般使用的不多。

一般而言，平均值與標準差是描述分佈很重要且又常用的兩個度量，對於常用的分佈，如已知其平均值和標準差，則這種分佈的全貌即可全部掌握。因此，對於這些尺度的概念和意義的理解和掌握是很重要的。由於平均值和變異數的具體求解較煩，所以為求方便使用起見，將各種分佈的平均值和變異數的計算公式彙整成列表資料是相當重要的。

4 可靠度理論

4.1 失效機率密度函數

在討論可靠度或壽命問題時，有興趣的隨機變數通常是代表產品的壽命時間或失效時間 t(正確地說應該是失效發生前的操作或工作時間)，因此在可靠度領域，通常是以 $f_T(t)$ 表示機率密度函數，有時稱之為失效機蓄密度函數，失效機率密度函數的物理意義為單位時間的失效機率，亦即發生在時刻 t 與 $t+\Delta t$ 之間的失效機率為 $f_T(t)\Delta t$，以數學式表示如下：

$$f_T(t)\Delta t = \Pr\{t \le T \le t + \Delta t\}$$

圖 2 所示為燈泡及電子管之壽命或失效時間機率密度函數。

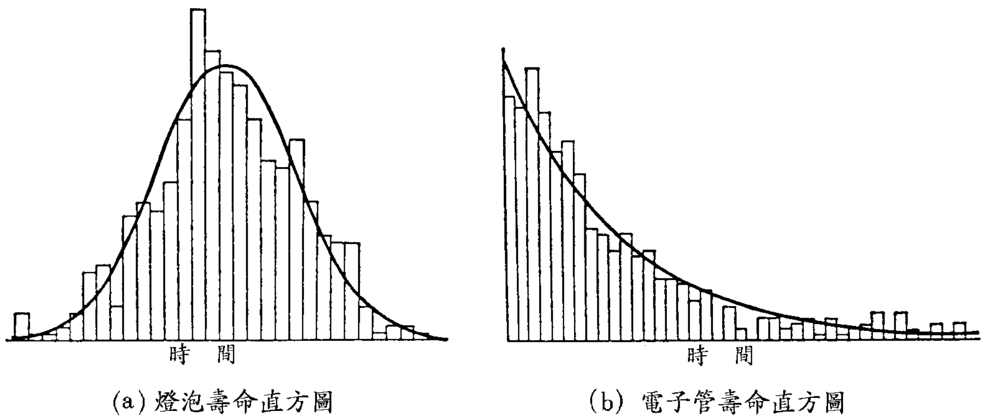


圖 2 燈泡與電子管壽命機率密度函數曲線

4.2 失效累積分佈函數

至於失效時間之累積分佈函數，則常以$F_T(t)$表示。由於時間的領域範圍為[0,＋∞]，因此，失效機率函數為：

$$F_T(t) = \Pr\{T \le t\} = \int_0^t f_T(\xi)d\xi \tag{41}$$

$F_T(t)$的物理意義為失效發生時間(或簡稱失效時間)小於或等於 t 的機率，亦即物品操作使用時間累積到 t 時，失效數目相對於全體總數的比率，因此稱為不可靠度函數(unreliability function)或失效機率函數(failure probability function)。

描述物品的可靠度特性，除了上述兩項直接由機率理論特性所定義的函數之外，另外還有兩個由於時間本身的特質所衍生定義的函數：可靠度函數與失效率函數。以下說明這兩個函數的特性，以及其他可靠度參數的意義。

4.3 可靠度函數

由於可靠度所討論的主要是物品的時間績效(performance over time)，常以失效時間 T 表示隨機變數，一般是以可靠度函數(reliability function)說明物品不失效的時間特性，亦即失效時間大於 t 的機率，記為$R(t)$。可靠度函數與失效機率函數互為共軛關係，因此，可靠度函數可由失效時間的失效密度函數，$f_T(t)$，或失效機率函數，$F_T(t)$，求得，亦即：

$$\begin{aligned} R(t) &= \Pr\{T > t\} \\ &= 1 - F_T(t) \\ &= 1 - \int_0^t f_T(\xi)d\xi \\ &= \int_t^\infty f_T(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{42}$$

根據機率密度函數的特性，明顯可得，任何一物品初始時的可靠度為 1，而到最後的可靠度終將趨近於 0，亦即：

$$R(0) = 1$$

及

$$R(\infty) = 0$$

由此可知，可靠度函數指的是經過一段時間的積分結果，代表此一時間過程(time interval)(0 到 t)中物品時間績效在宏觀的(macro)、全部的(global)等方面的積分平均結果，而以這段期間終點時刻 t 表示此一結果的定位指標。

4.4 失效率函數

失效率函數(failure rate function)，又稱為危害函數(hazard function)，一般記為 h(t)、z(t)或$\lambda(t)$。此函數的意義為，在總數為N_0的物品中，存活到時間 t 時的物品數目$N_s(t)$與

在從 t 到 $(t+\delta t)$ 之間的單位時間(δt)內發生失效的產品數目 $N_f(t)$ 之間的比率，其中在時間為 t 時的存活數 $N_S(t) = N_0[1 - F_T(t)] = N_0 R(t)$，明顯可知與 $R(t)$ 成正比，而且在時間為 t 時的失效數 $N_f(t) = N_0[F_T(t+\delta t) - F_T(t)] = N_0 f_T(t)\delta t$，與 $f_T(t)$ 成正比。此一比率顯然有隨時間的變化關係，其計算式可表示如下：

$$h(t) = \frac{N_F(t)/\delta t}{N_S(t)} = \frac{N_0[F_T(t+\delta t) - F_T(t)]/\delta t}{N_0 R(t)} = \frac{N_0 f_T(t)\delta t/\delta t}{N_0 R(t)} = \frac{f_T(t)}{R(t)} \tag{43a}$$

由此一定義可知，失效率函數代表著在任何一瞬間的單位時間不良率，因此較嚴謹的稱法為順時失效率函數(instantaneous failure rate function)。由於此函數中的時間 t 代表著任何瞬間的時刻，因此此一函數乃是從微觀的(micro)、局部的(local)角度說明物品的時間績效特性。

若討論 t_1 到 t_2 失效發生的失效率時，此時間間隔內發生的失效數除以時間間隔長度，並假設在該時間間隔開始時刻 t_1 之前沒有發生失效，因此：

$$\lambda(t) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} \tag{43b}$$

或以另一種形式表示為：

$$\lambda(t) = \frac{R(t) - R(t+\tau)}{\tau\, R(t)} \tag{43c}$$

式中 $t_1 = t$、$t_2 = t + \tau$，此失效率一般稱為平均失效率。

另外，由於 $f_T(t)$、$F_T(t)$ 與 $R(t)$ 之間有如下關係：

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{44}$$

因此，$h(t)$ 亦可以表示為：

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{R(t)} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{d\ln R(t)}{dt} \tag{45}$$

設 $t=0$ 時的可靠度為 1，由上式可求得：

$$\ln R(t) = -\int_0^t h(\xi)d\xi$$

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{46}$$

此即可靠度函數的一般形式，上式在指數函數中的積分式部份一般稱為累積危害函數(cumulative hazard function)，以 $H(t)$ 表示，亦即：

$$H(t) \equiv \int_0^t h(\xi)d\xi \tag{47}$$

亦即，可靠度函數與累積危害函數之間有如下之關係：

$$R(t) = e^{-H(t)}$$

累積危害函數為危害率函數的積分結果，其物理意義可視為在時間(0,t)**內累積的平均失效次數，此一函數並不是機率，因此不必受到必須小於** 1 **的限制。**

由上述諸關係可知，已知 $f_T(t)$ **的話，即可求得** $F_T(t)$、h(t)、R(t)、H(t)**等函數，這四個基本函數的關係如表** 1 **所示。**

4.5 浴缸曲線

一般而言，物品的失效率函數會隨著時間變化而改變，亦即失效率為時間的函數，此一特性可充分顯示出失效的原因。除了少數應用情形之外，大部份物品的失效率隨時間的變化幾乎無例外的呈現一浴缸曲線的性質，如圖 3 **所示。事實上，此一現象與有生命的動物(包括人)的壽命特性一樣，因此只要使用失效代替死亡，原本描述人類壽命分佈特性的情形，都可應用於描述物品的失效行為。**

表 1**：可靠度特徵量中四個基本函數關係表**

	$f_T(t)$	$F_T(t)$	$R(t)$	$h(t)$
$f_T(t)$	—	$\frac{dF_T(t)}{dt}$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$h(t)e^{-\int_0^\infty h(t)dt}$
$F_T(t)$	$\int_0^\infty f_T(t)dt$	—	$1-R(t)$	$1-e^{-\int_0^\infty h(t)dt}$
$R(t)$	$\int_t^\infty f(\xi)d\xi$	$1-F_T(t)$	—	$e^{-\int_0^\infty h(t)dt}$
$h(t)$	$\frac{f_T(t)}{\int_t^\infty f_T(\xi)d\xi}$	$\frac{\frac{dF_T(t)}{dt}}{1-F_T(t)}$	$-\frac{d\ln R(t)}{dt}$	—

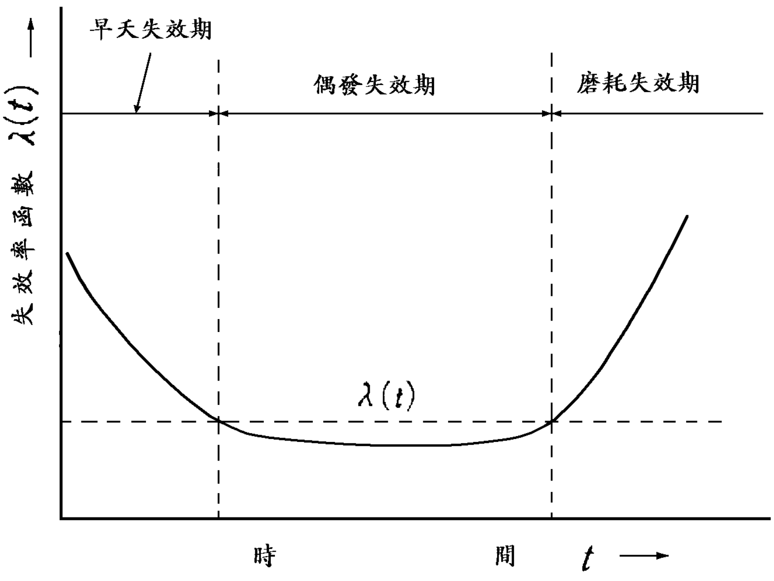


圖 3**:失效率浴缸曲線**

一般物品的失效行為就像人的壽命一樣，在生命初期有一段很短的期間內($0 \le t \le t_u$)，由於存在著潛在疵病很容易發生失效，其失效率隨著時間變化逐漸遞減，為一時間的嚴格遞減函數$\lambda_e(t)$，此一時期一般稱為早夭期(infant mortality period)；當時間超過某一時刻 t_u 之後，有一段相當長的時間內($t_u \le t \le t_w$)，失效往往是偶然發生的，物品的失效率大致不變，為一常數值λ_c，此一時期一般稱為有用期(useful period)；當時間超過另一時刻t_w之後，物品的失效率反而隨著時間變化逐漸遞增，為一時間的嚴格遞增函數，$\lambda_w(t)$，此一時期一般稱為磨耗期(wearout period)。由於這三段時間組合成的失效率函數的形狀很像浴缸一樣，因此稱之為浴缸曲線(bathtub curve)。

4.6 特徵壽命

同型產品每一個個體的失效時間或壽命均不相同，說明此一產品壽命趨勢的指標稱為特徵壽命，一般用可靠壽命、平均壽命或中位壽命表示之，其間的差異則視產品的特色而定。

4.6.1 平均壽命

產品無失效時間的平均值，稱為平均壽命(mean life)或平均失效時間(mean failure time)，一般記為$\bar{t}$或θ。對於可維修物品而言，平均壽命為平均失效間隔時間(mean time between failure, MTBF)；對不可維修物品而言， 則為平均失效發生時間(mean time to failure, MTTF)。平均壽命的定義為：

$$\bar{t} = E[T] = \int_0^\infty t f_T(t) dt = \int_0^\infty R(t) dt \tag{48}$$

4.6.2 中位壽命

當指定產品的可靠度 $R=0.5$ 時，亦即$R(t)=1-F_T(t)=0.5$，此時的壽命稱為中位壽命(median life)，一般記為$\tilde{t}$ 或 $t_{0.5}$。

4.6.3 平均任務時間

對於有些固定任務或預先設定壽限(end of life)， t_D，的系統而言，則以平均任務時間(mean mission duration, MMD)表示其特徵壽命，平均任務時間的定義為：

$$\begin{aligned} MMD &= \int_0^{t_D} t f_T(t) dt \\ &= \int_0^{t_D} R(t) dt \end{aligned}$$

一般而言，平均任務時間(MMD)小於平均失效時間(MTBF)，亦即：

$$MMD < MTBF$$

4.6.4 可靠壽命

可靠壽命是給定的可靠度值時所對應的壽命時間，記為$t(R)$或t_{1-R}。一般而言，可靠度為隨著工作時間 t 的增加而下降的函數，因此對不同的給定 R 值，則有不同的$t(R)$，即：

$$t(R) = R^{-1}(t)$$

式中$R^{-1}(\cdot)$為 R 的反函數。

可靠壽命的觀測值是能完成規定功能的產品的比例恰好等於給定可靠度時所對應的壽命時間。例如對 100 個產品進行壽命試驗，指定可靠度 R＝0.9，若當第 10 個產品失效時的時間為 250 小時，則 t(0.9)＝250hr。

另外，有些機械元件，是以某一給定的不可靠度值或失效機率來表示所對應的可靠壽命，例如軸承的 B_{10} 就是指當操作時間達為 B_{10} 時，將會有 10%的軸承會發生失效。

4.6.5 指數分佈產品特徵壽命

若產品的壽命 T 服從指數分佈，這是可靠度技術中用得最多也是最簡單的一種分佈，它的失效率是常數，即$h(t) = \lambda$，則產品的可靠壽命，根據定義解 t 得：

$$t(R) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{R(t)} = \theta\ln\frac{1}{R(t)}$$

產品壽命為指數分佈，則其平均值，亦即平均失效時間或平均壽命，$\bar{t}$，為：

$$\bar{t} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}\int e^{-\lambda t}d\lambda t = \frac{1}{\lambda} = \theta$$

因此，在應用上，常用θ代替平均失效時間或平均壽命$\bar{t}$，但是必須特別注意的是這只有在失效時間為指數分佈時才有這種特性。

這表示指數分佈的參數λ與平均值有互為倒數的關係，即失效率與平均壽命或平均失效時間(MTBF)之間為互為倒數的關係。

中位壽命，$\tilde{t}$，將 R＝0.5 代入上式中得：

$$\tilde{t} = t(0.5) = \theta\ln\frac{1}{R(t)} = \theta\ln\frac{1}{0.5} = 0.693\theta$$

當 t 為平均失效時間時，亦即求$t = \theta$時的可靠度，因$\theta = 1/\lambda$，因此，可計算得$R(t = \theta)$之值為：

$$R(\theta) = e^{-\lambda\theta} = e^{-1} = 0.368$$

另外，當λt值很小時，利用泰勒級數將指數函數展開，可得下列近似關係：

$$R(t)=e^{-\lambda t}\approx 1-\lambda t=-\frac{t}{\theta}$$

解 t 可以得到可靠壽命的近似式為：

$$t(R)\approx(1-R)\theta$$

上面的簡單關係式僅適用於可靠度較高的指數分佈，表 2 列出了 $R\geq 0.9$ 的各種典型可靠度數值之相對可靠壽命值。對非指數分佈的可靠壽命與指數分佈的可靠壽命，計算結果差別往往很大，不過一般複雜的系統，其壽命大多服從指數分佈，或可用指數分佈來近似表示。對於非指數分佈，有時為了簡化計算，應用平均失效率的概念，也可近似應用指數分佈的這些關係式。

表 2: 指數分佈各種可靠度對應的可靠壽命

R(t)	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	…
t(R)	0.1 θ	0.01 θ	0.001 θ	0.0001 θ	0.00001 θ	…

5 維護度理論

就可靠度而言，人們所關心的是使設計出來的產品能夠正常工作的時間越長越好，而就維護度來說，關心的重點則是使設計出來的產品在發生失效時能夠是使失效儘快排除。將高可靠度與高維護度結合起來，就可以得到高可用度，有關可用度方面的理論將在下一節中加以討論。

維護度是在設備或系統發生失效後使其方便而快速地恢復到可以工作狀態的一種度量，它是下列因素的函數：設備設計與安裝、符合規定技術水準人員的可用度、維護程度與試驗設備的完好性、以及進行維修時所處的環境條件等。

和可靠度一樣，維護度參數也是機率參數，並且也是使用連續型與斷續型隨機變數、機率參數、和機率分佈進行分析。例如，在某時刻 t 完成的維修活動的次數是離散型維修度參數；又如，完成一次維修活動所需時間則為連續型維護度參數。

利用類似可靠度中的那些函數關係來瞭解基本維護度概念是一種比較好的方法，可以用與在上一節推導可靠度函數時所使用的同樣方法來推導維護度函數。只不過以修復時間 t_{op}(或 ttf)代替失效前工作時間 t_{mt} (或 ttr)，以修復率 μ 代替失效率 λ，以在某時間 t 內成功地完成一次維修活動的機率 $M(t)=Pr(T_M\leq t)$，代替在壽命 t 前發生失效的機率 $F(t)=Pr(T_R\leq t)$。換句話說，在可靠度與維護度工程函數中，常常採用下列對應關係。

1. 維護度中的修復時間(ttr)的機率密度函數(pdf)，對應於可靠度中的失效前工作時間(ttf)的機率密度函數。
2. 維護度中的修復率函數對應於可靠度中的失效率函數。修復率是完成一次維修活動的速度，並以每小時進行的且成功地完成的修復活動的次數表示。
3. 系統成功地修復的機率或系統維護度，對應於系統失效機率或系統的不可靠度。

假設修復時間的機率密度函數為 $g(t)$，則維護度函數 $M(t)$ 為：

$$M(t)=\int_0^t g(t)dt$$

修復率函數 $\mu(t)$ 為：

$$\mu(t)=\frac{g(t)}{1-M(t)}$$

平均修復時間(MTTR)為：

$$\mathrm{MTTR}=\int_0^\infty t\,g(t)dt$$

維護度可以表示為修理一定百分比(p%)的所有系統失效所需時間(T)的度量，也可以表示為失效發生後在時間間隔(T)內可以將系統恢復到工作狀態的機率。

代表性的修復時間可以用平均的、中位的和最大的修復時間表示，分別稱為平均修復時間、中位修復時間及最大修復時間。這三種代表性修復時間的定義說明如下：

1. 平均修復時間 $\overline{M}(t_{ct})$：完成一次維修活動所需要的平均時間，即總維修時停機時間，除以在給定時間間隔內的總維修活動次數，可以下式表示：

$$\overline{M}_{ct}=\frac{\sum\left(\lambda_i\overline{M}_{cti}\right)}{\sum\lambda_i}$$

式中 λ_i = 該產品第 i 個可維修單元的失效率，其維護度必須加以確定並必須按工作循還、致命性失效、容差、和交互失效等因素加以調整，這些因素會致使產品效能降低到不得不進行維修活動的程度。

$\overline{M}_{cti}$ = 在第 i 個可維修單元發生失效時對其進行維修活動所需要的平均修復時間。

2. 中位修復時間 $\tilde{M}_{ct}$：能夠完成 50%的全部維修活動的停機時間。

3. 最大修復時間 M_{max}：完成規定百分比(例如：95%)的所有維修活動的最長時間。

6 可靠度/維護度分析常用之機率分佈

由可靠度之定義可知，物品的可靠度與其特性有密切的關係，而物品特性一般可分為代表空間(spatial)特性的性能(performance)與代表時間(temporal)特性的壽命(life)兩種，其中性能又可分為非實體的功能(functional)和實體的結構(physical)兩部份。這些特性或構成這些特性的因素，一般可以透過量測或觀察，用定量的數據(variable)來描述，而所獲得數據則依所使用工具或方法的解析度(resolution)有所差異，根據數據的屬性不同又可區分為連續變數(continuous variable)及斷續變數(discrete variable)。然而物品特性或構成物品特性的各種因數大多具不確定性(uncertainty)，因此常用隨機變數(random variable)表示之。

每一隨機變數均可使用適切的機率分佈來加以描述，一般決定機率分佈的方法不一，有時可根據工程經驗決定數據的機率分佈種類。例如在連續型隨機變數方面，一

般的功能多可以假設用常態分佈(normal distribution)、對數常態分佈(log-normal distribution)等機率分佈來描述，結構強度與物性多為常態分佈、對數常態分佈、韋伯分佈(Weibull distribution)、瑞雷分佈(Rayleigh distribution)等機率分佈來描述，而時間數據則多以指數分佈(exponential distribution)、韋伯分佈、常態分佈、伽瑪分佈(gamma distribution)等機率分佈來說明；在斷續型隨機變數方面，性能特性常用二項分佈(binomial distribution)表示，而時間特性則使用波桑分佈(Poisson distribution)；詳細情形如圖 4 所示。

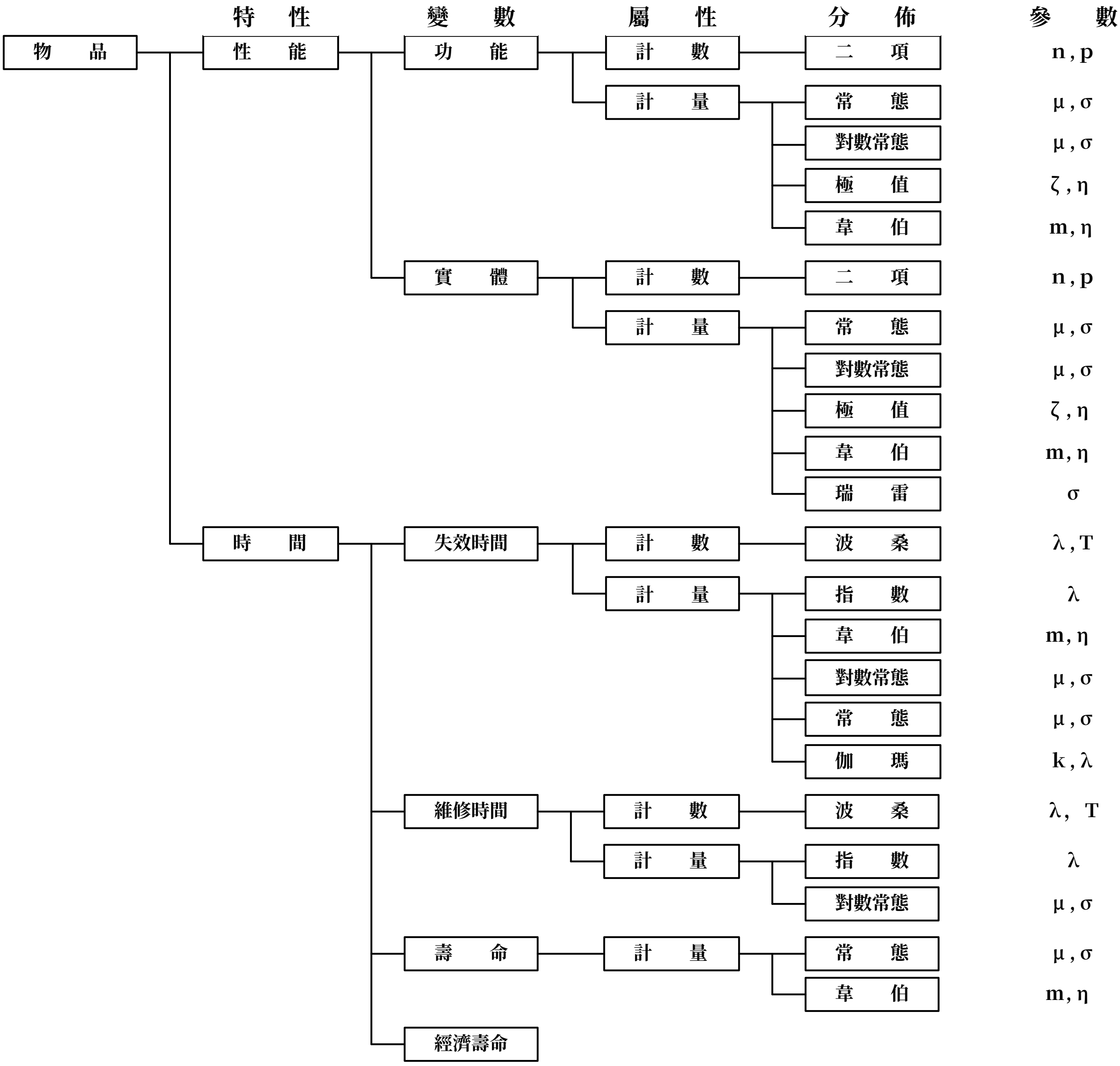


圖 4：產品特性與機率分佈之種類

表現產品生命週期可靠度特徵最具代表性的是失效浴盆曲線，通常可以用韋伯分佈、指數分佈及常態分佈來分別描述此一曲線的早夭期、有用期及磨耗期三個區域的失效壽命特性。

用於維護度分析的機率分佈數量要比用於可靠度分析的少一些，這可能是由於在發展過程中維護度歷來落後可靠度理論。

在維護度分析中最常用的機率分佈有：常態、對數常態與指數分佈。事實上，正如在設備與系統的可靠度分析中一樣，指數分佈已經得到最廣泛的應用，在設備與系統的維護度分析中，對數常態分佈也得到了最廣泛的應用。許多研究工作都證明了對數常態分佈最適於維護度分析。

儘管在維護度分析中應用最普遍的是對數常態分佈，但也可以使用其它分佈，如韋伯分佈和伽瑪分佈，這決定於數據的分析和分佈適配度檢定的採用情況。

6.1 常態分佈

常態分佈(normal distribution)又叫高斯分佈(Gaussian distribution)，是常用的一種分佈，它是研究量測中許多偶然因素所引起的誤差而得到的一種分佈。這些偶然因素中每個的影響都很小，而且互相獨立。在一般裝備常遇到的零件尺寸、材料強度、金屬磨損、作用載荷等由許多微小且相互獨立的偶然因素引起的隨機變數，都服從常態分佈。

6.1.1 機率密度函數與累積分佈函數

常態分佈的機率密度函數 $f_X(x)$與累積分佈函數 $F_X(x)$分別示如下：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right],-\infty<x<+\infty \tag{50a}$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]dx \tag{50b}$$

由上式可知，常態分佈有兩個參數，其中μ_X與隨機變數 x 為加減關係，為常態分佈之位置參數(location parameter)；另外一個參數σ_X，與隨機變數為乘除關係，為常態分佈之尺度參數(scale parameter)。

6.1.2 數學期望值

常態分佈之平均值(對原點之一階轉矩)與變異數(對中心點之二階轉矩)，可由已知機率密度函數之期望值分別求得為：

$$E[X]=\mu_X \tag{51}$$

$$V[X]=\sigma_X{}^2 \tag{52}$$

由上式可知，常態分佈之平均值(mean)等於位置參數，而標準偏差(standard deviation)則為尺度參數。

6.1.3 特性描述

常態分佈呈吊鐘形分佈，通常以$N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$表示，也有以$nor\left(x;\mu_X,\sigma_X\right)$表示的。常態分佈具有如下特徵：

(1). $f_X(x)$曲線以μ_X為對稱，在μ_X兩側曲線與橫座標軸間的面積各為 0.5；

(2). $f_X(x)$曲線在$x\pm\sigma_X$處為反曲點；

(3). 從μ_X左右各距離一個σ_X，各佔面積 34.13%，再距離一個σ_X，各佔 13.59%，又距一個σ_X，又各佔 2.145%，大於$x+3\sigma_X$或小於$x-3\sigma_X$所佔面積很小，均不超過 0.135%。由此可見，在$(\mu_X\pm\sigma_X)$區間內的機率為 68.26%，在$(\mu_X\pm 2\sigma_X)$區間內的機率為 95.44%，在$(\mu_X\pm 3\sigma_X)$區間內的機率為 99.73%，在$(\mu_X\pm 3\sigma_X)$區間外的機率僅為 0.27%，不足 0.3%，所以常態分佈隨機變數的觀測值落在$(\mu_X\pm 3\sigma_X)$區間內的機率幾乎是肯定的，這就是所謂的「3σ 原則」。

當討論失效時間的可靠度問題時，常以隨機變數 T 代替隨機變數 X。一般隨機變數 X 的領域為[－∞,＋∞]，而隨機變數 T 的領域則為[0,＋∞]。因此，時間常態分佈的可靠度函數 R(t)、失效率 h(t)可由前節所推導得的關係式求得，結果如下所示：

$$f_T(t)=\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}R(t)&=\int_t^{\infty}f_T(\xi)d\xi\\&=\int_t^{\infty}\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu_T}{\sigma_T}\right)^2\right]d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(t)&=\frac{f_T(t)}{R(t)}\\&=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right)^2\right]}{\int_t^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu_T}{\sigma_T}\right)^2\right]d\xi}\end{aligned}$$

圖 5 為常態分佈之機率密度函數$f_T(t)$、可靠度函數 R(t)及失效率函數 h(t)曲線。根據常態分佈的特性，當σ_T愈小時，$f_T(t)$在平均值周圍的離散範圍愈小，R(t)在平均值附近驟減，h(t)在平均值附近驟增。但在常態分佈，當σ_T增加的話，在 t＝0 時有不可忽視的失效發生機率，不合實際。因而，可靠度或 ppm 管理之類以失效發生機率小的事件為對象時，或以偏離平均值的分佈尾端為問題時，必須慎重利用常態分佈。

根據統計學的中央極限定理(central limit theorem)，變數個數愈多時，多個隨機變數之和的分佈愈接近常態分佈，因此，常態分佈適用於可表現為多個隨機要因之和的機

率現象，稱為機率加法性，但不適用於產品壽命之類要因中之最小值決定品質的問題。

在處理常態分佈隨機變數時，通常將之轉換成標準常態隨機變數(z)：

$$z(t)=\frac{t-\mu}{\sigma} \tag{55}$$

經由此一轉換關係，常態分佈隨機變數之機率密度函數、累積分佈函數、可靠度函數及失效率函數，可用標準常態機率密度函數，$\phi(\cdot)$，及標準常態累積分佈函數，$\Phi(\cdot)$，表示如下：

$$\begin{aligned} f_T(t)&=\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right)^2\right] \\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}z^2\right) \\ &=\phi(z) \end{aligned} \tag{56}$$

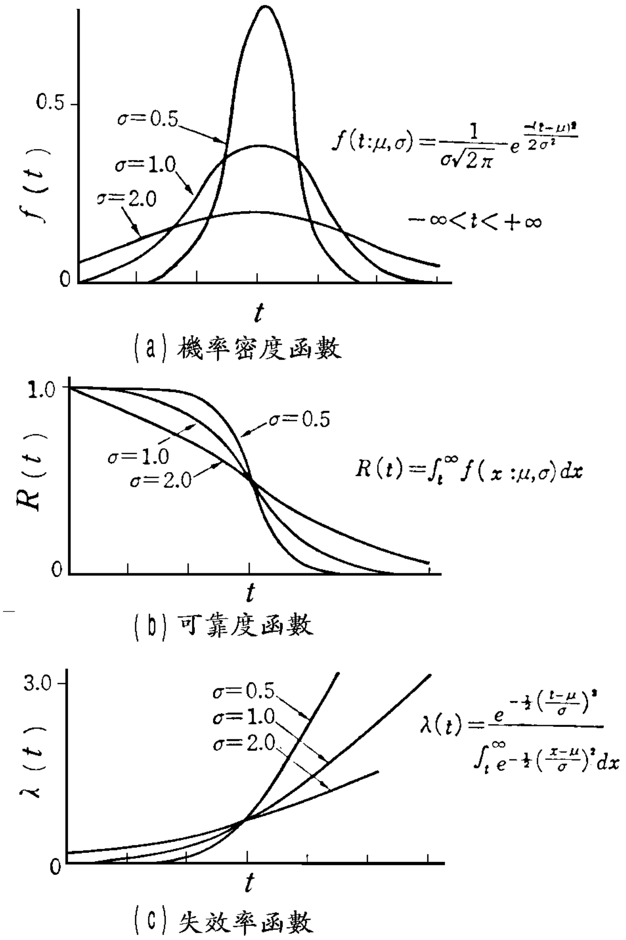


圖 5 常態分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{z} \phi(\xi)d\xi = \Phi(z)$$

$$R(t) = \int_{t}^{\infty} f_T(\xi)d\xi = \int_{z}^{\infty} \phi(\xi)d\xi = 1 - \Phi(z)$$

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{R(t)} = \frac{\phi(z)}{1-\Phi(z)}$$

標準常態分佈為一無參數之機率分佈，其 pdf, $\phi(\cdot)$，**及** CDF，$\Phi(\cdot)$，**在一般機率與統計書籍中均可找到適當的圖表，應用上頗為方便。**

6.1.4 應用說明

常態分佈的失效率為隨時間增加的樣式，很適合用以描述耗損型失效，例如電燈的壽命、熔絲的熔斷時間、輪胎壽命、機械零件的失效、材料強度的安全係數等，均可用常態分佈來討論。

6.2 對數常態分佈

6.2.1 機率密度函數與累積分佈函數

對數常態分佈是指隨機變數 t，（$0 < t < \infty$），**的對數值**$(Y = \ln t)$**符合常態分佈**$N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$**時的分佈，一般記為**$\ln(t; \mu_Y, \sigma_Y)$，**其機率密度函數、累積分佈函數分別可用下式表示：**

$$f_T(t) = \frac{1}{t\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], 0 < t < \infty \tag{58}$$

$$F_T(t) = \int_0^t f_T(\xi)d\xi = \int_0^t \frac{1}{\xi\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]d\xi \tag{59}$$

6.2.2 數學期望值

對數常態分佈的參數可由標準常態分佈表求得，其平均值 E[T]**及變異數** V[T]**如下所示：**

$$E[T]=\exp\left(\mu_Y+\frac{1}{2}\sigma_Y{}^2\right) \tag{60}$$

$$V[T]=\exp\left(2\mu_Y+\sigma_Y{}^2\right)\left[\exp\left(\sigma_Y{}^2\right)-1\right] \tag{61}$$

6.2.3 特性描述

圖 6(a)(b)(c)為 $f_T(t)$、R(t)、h(t)＝$f_T(t)/R(t)$之例，可見對數常態分佈考慮 t>0 的領域即可，機率密度函數形成以極大值為中心而左右非對稱，當σ_Y小時，接近常態分佈。失效率隨著隨時間 t 增加而增加，不久則漸減，此樣式猶如製造廠除去初期失效後出貨，遺漏的初期失效會在使用初期的階段發生，最後逐漸穩定於產品固有失效率的過程。

6.2.4 應用說明

常態分佈為多個隨機變數之和的分佈，對數常態分佈可視為多個隨機變數之積的分佈。一般鏈的強度取決於最弱的一環，物品的失效常由構成組件的最弱處發生，考慮失效要因之積的分佈，即可瞭解此種失效。

有些物理現象，如電晶體材料的疲勞破壞，由於暴露而造成的腐蝕等，其疲勞裂紋的增長及腐蝕深度隨著時間的增加而逐漸增大，這些現象引起的疲勞壽命服從對數常態分佈。一般而言，對數常態分佈適用於機械材料的疲勞強度或疲勞壽命、磨耗壽命分佈的研究，半導體、電容器等電子零件的失效時間分佈，人為失誤或個人能力的分佈等都符合對數常態分佈，在可靠度領域中，對數常態分佈比常態分佈重要。

6.3 指數分佈

6.3.1 機率密度函數與累積分佈函數

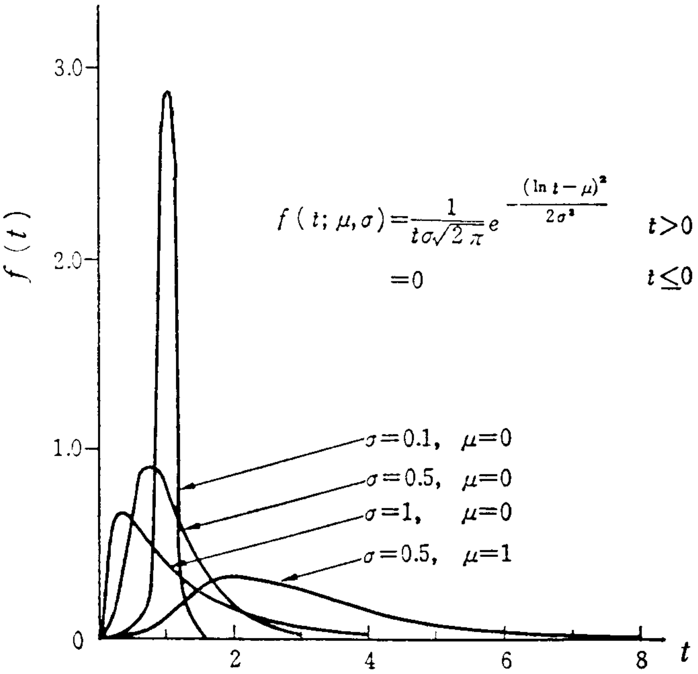
指數分佈是失效率λ對時間成一定值的分佈，一般記為$\exp(t;\lambda)$，在失效曲線的偶發失效領域成立，其機率密度函數及可靠度函數分別為：

$$f_T(t)=\lambda\exp(-\lambda t),0<t<\infty,0<\lambda \tag{62}$$

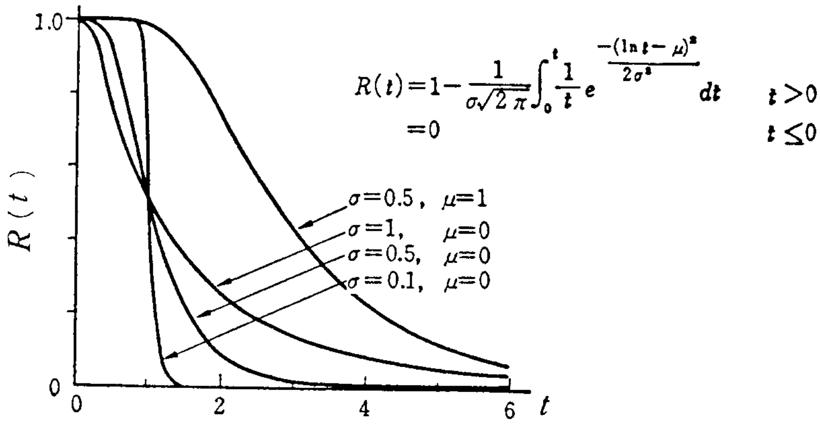
$$F_T(t)=\int_0^{\infty}f_T(t)dt=1-\exp(-\lambda t)$$

$$R(t)=1-F_T(t)=\exp(-\lambda t) \tag{63}$$

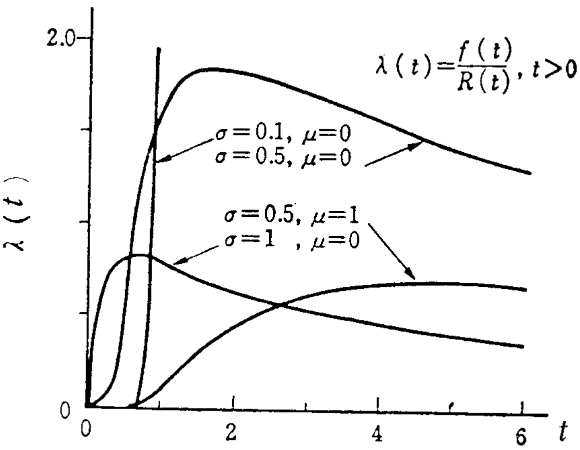
由上式可知，指數分佈有一參數，與隨機變數 t 為乘除關係，因此為指數分佈的尺度參數。



(a) 機率密度函數



(b) 可靠度函數



(c) 失效率函數

圖 6：對數常態分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

6.3.2 特性描述

壽命時間呈指數分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數如圖 7 所示，由圖可看出$f_T(t)$在時間短處呈最大值，亦即：

$$f_T(t=0)=\lambda \tag{64}$$

可靠度函數的趨勢與機率密度函數相似，失效率函數則不隨時間而變化，為一常數值λ，亦即：

$$h(t)=\lambda$$

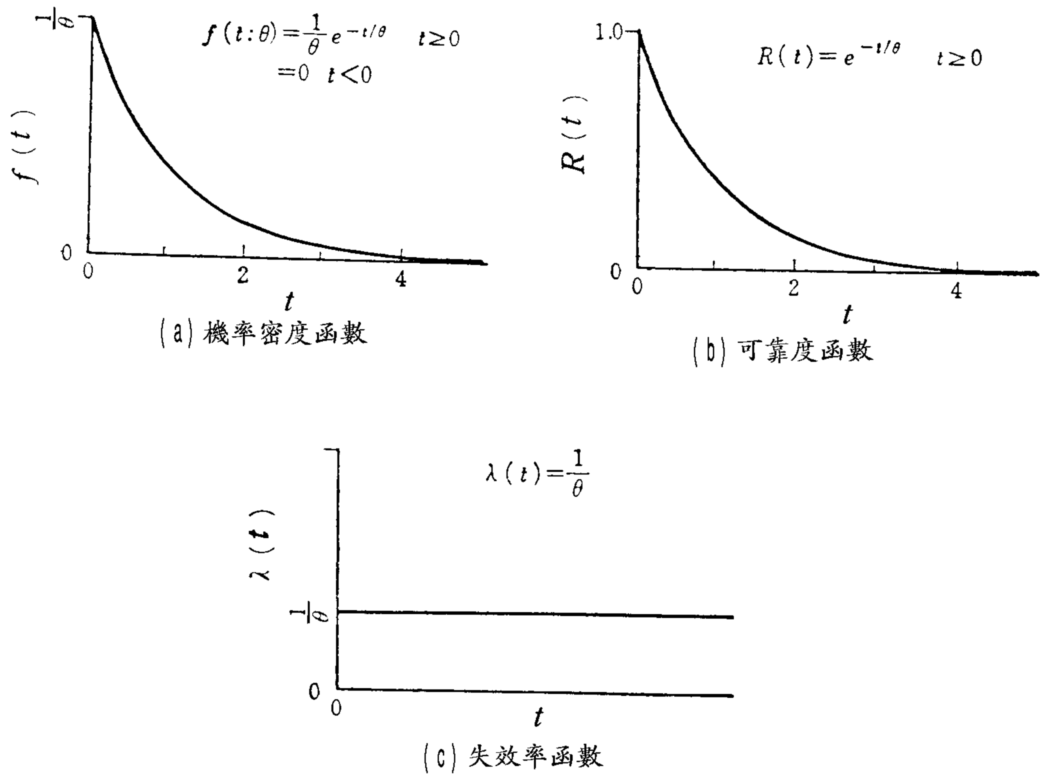


圖 7 指數分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

指數分佈的重要性質之一為無記憶性(memoryless)，即一物品的失效時間為指數分佈，則當時刻為τ物品為正常時，則在τ以後操作一段時間 t 的可靠度或剩餘壽命和新的產品一樣，與τ無關，亦即：

$$\begin{aligned}R(T=t+\tau \mid T=\tau)&=\frac{R(t+\tau)}{R(\tau)}\\&=\frac{\exp(-\lambda(t+\tau))}{\exp(-\lambda\tau)}\\&=\exp(-\lambda t)\end{aligned}$$

當產品的壽命等於平均壽命時之可靠度值為：

$$R(t=\theta)=\exp\left(-\frac{\theta}{\theta}\right)=\exp(-1)=0.368$$

可見指數分佈在平均壽命 θ 延長時，標準偏差也與之同等增大，壽命等於平均壽命時的存活數為總數的 36.8%，遠小於常態分佈之 50.0%，此種性質對產品的可靠度而言未必理想。所以，指數分佈領域不可視為偶發失效，須調查失效原因，減少失效要因。

6.3.3 應用說明

以前，電子管壽命被列為指數分佈的代表，有礙電子裝備的高可靠度化，但隨著失效原因的減少，電子管的壽命也接近常態分佈，也實用於高可靠度裝備。

指數分佈在產品複雜、失效原因重合時，失效的發生時點不規則化，可用偶發模型說明。經驗上知道修理而使用的產品失效間隔時間符合指數分佈。理論上也證明此事的妥當性。亦即，根據 Derrick 的指數極限定理，修理而使用的產品不論構成組件的失效分佈是什麼，產品的失效間隔時間(time between failure)最後呈指數分佈。在產品使用前進行除錯(debugging)，除去初期失效的零件，更換良品，或使用一段時間後，預防性更換容易失效的零件，進行預防保養，即可使產品的失效率一定化，這些場合可用指數分佈。

6.4 韋伯分佈

6.4.1 機率密度函數與累積分佈函數

韋伯分佈是 W. Weibull 先生在研究金屬材料疲勞壽命時所發現的機率分佈，一般記為 $\mathrm{wei}(t;m,h)$，其機率密度函數 $f_T(t)$、累積分佈函數 $F_T(t)$、可靠度函數 R(t)、及失效率函數 h(t)，分別說明如下：

$$f_T(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right],0<t<\infty,0<m,<\eta \tag{67}$$

$$F_T(t)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right] \tag{68}$$

$$R(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right] \tag{69}$$

由上式可求得失效率函數為：

$$h(t)=\frac{f_T(t)}{R(t)}=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \tag{70}$$

上式為兩參數韋伯分佈，其中 η 與隨機變數 t 為乘除關係，因此為韋伯分佈的尺度參數，η 又稱為特性壽命(characteristic life)，可衡量平均壽命，當 $t=\eta$ 時，可靠度為 36.8%，η 相當於指數分佈的平均壽命；另外一個參數 m 與隨機變數為冪次方關係，因此為形狀參數。

6.4.2 數學期望值

韋伯分佈的平均值與變異數分別為：

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \int_0^\infty t\, f_T(t)dt \\
&= \eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)
\end{aligned}
\tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
V[T] &= \int_0^\infty t^2 f_T(t)dt \\
&= \eta^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

其中$\Gamma(\cdot)$為伽瑪函數(gamma function)。

6.4.3 特性描述

韋伯機率密度函數中的 m 為形狀參數，決定分佈的形狀，η為尺度參數，與平均壽命有關。當 m<1 時，失效率隨時間增加而減少，$f_T(t)$、R(t)呈初期失效型分佈；當 m=1 時，失效率為一定值，不隨時間變化，韋伯分佈與前述指數分佈相同；當 m>1 時，失效率隨時間增加而增加，屬於磨耗型失效分佈；當 m 接近 2 時，韋伯分佈的$f_T(t)$接近對數常態佈；當 m=2 時，又稱為瑞雷分佈(Rayleigh distribution)；當 m 介 3.4 至 3.8 時，韋伯分佈的機率密度函數$f_T(t)$接近常態分佈。選擇適當的 m 值，韋伯分佈可以符合包括初期失效期、偶發失效期及磨耗失效期等三個階段的全領域失效分佈，同時也可以近似對數常態分佈及常態分佈，因此，韋伯分佈適於描述很多的可靠度數據。圖 8 為 m=0.25、1、2 及 4，$\eta=1$時的$f_T(t)$、R(t)及 h(t)。

當 m 大於 1 時，可假設$\Gamma[1+1/m]\approx 1$，故可由特性壽命得到平均壽命的近似值：

$$\mu \approx \eta$$

6.4.4 應用說明

韋伯分佈的形狀參數 m 與物品的失效原因或機理有著密切的關係，因此根據資料評估結果所獲得之 m 值可推論失效之可能機制。由機率密度函數的形式可知，韋伯分佈是將指數分佈一般化，另一方面可從表示最小值或最大值之極值分佈推導出韋伯分佈，亦即韋伯分佈可視為很多隨機變數最小值的漸近分佈，產品失效起因於產品的最弱處，所以，極值分佈之一的韋伯分佈很符合實際產品的失效數據，熱點(熱集中)或電場集中所引致的電子零件失效、應力集中所引致的金屬材料裂紋成長及破壞等為其例。根據經驗累積，各種零件與裝備的失效時間資料以韋伯分佈評估所獲得的 m 值如表 3 所示。

以上是認為開始觀測後，總會發生失效，不過，實際上，有時在某一段期間中看不出失效，例如在樹脂密封式零件，空氣中的水分在樹脂中擴散，與內部的元件反應，使零件特性劣化時，水分在樹脂中擴散而達到元件前，看不出失效，此時，上述

有關失效分佈的各個函數須導入開始失效前的時間ζ。導入第三個參數ζ後的韋伯分佈，其機率密度函數成為：

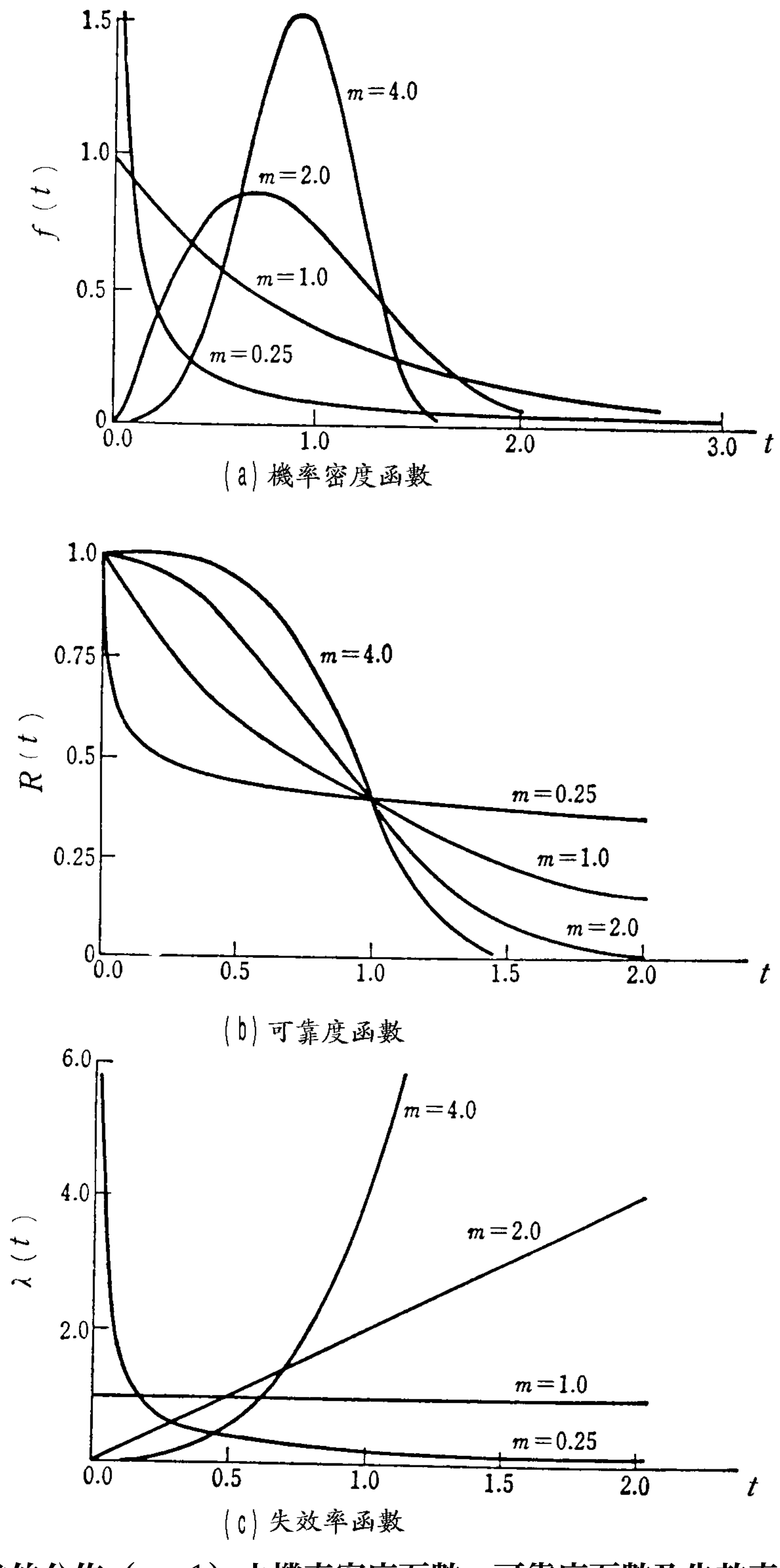


圖 8: 韋伯分佈（η＝1）之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

$$f_T(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\zeta}{\eta-\zeta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{t-\zeta}{\eta-\zeta}\right)^{m}\right] \tag{73}$$

上式中新增參數ζ與隨機變數為加減關係，稱為位置參數，實用上，有時稱ζ為保證期間或無失效時間。

表 3：各種物品韋伯失效分佈之形狀參數

物品名稱	m值	物品名稱	m值	物品名稱	m值
電晶體	0.2 – 1.2	馬達	3.0	電視	0.65 – 0.75
積體電路	0.3 – 0.9	汽車用點火線圈	0.75	計算機	0.85 – 1.1
電子管	1.0 – 2.8	馬達軸承	3.0	冰箱	1.3 – 1.7
電阻器	0.3 – 0.7	離合器軸承	0.92	空調裝置	1.0
電容器	0.3 – 0.9	閘踏板	1.46	升降機	0.8 – 1.0
燈泡	2.7 – 3.0	墊圈	1.2 – 1.5	自卸卡車	1.0 – 1.7
標示燈	1.2 – 2.3	彈簧	3.1	煉油裝備	0.84 – 1.18
開關	2.3 – 2.5	油壓幫浦	4.2	煞車設備	1.0 – 1.3
微開關	2.6	油壓汽缸	1.8		

6.5 伽瑪分佈

6.5.1 機率密度函數與累積分佈函數

伽瑪分佈可以視為 k 個指數分佈之和的分佈，一般記為$\mathrm{gam}(t;k,\lambda)$，其機率密度函數、累積分佈函數、可靠度函數及失效率函數分別如下所示：

$$f_T(t)=\frac{\lambda}{\Gamma(k)}(\lambda t)^{k-1}\exp(-\lambda t),0<t<\infty,0<k,0<\lambda \tag{74}$$

$$F_T(t)=\frac{\lambda}{\Gamma(k)}\int_0^t(\lambda\xi)^{k-1}\exp(-\lambda\xi)d\xi \tag{75}$$

$$R(t)=\frac{\lambda}{\Gamma(k)}\int_t^\infty(\lambda\xi)^{k-1}\exp(-\lambda)d\xi \tag{76}$$

$$h(t)=\frac{f_T(t)}{R(t)}=\frac{(\lambda t)^{k-1}\exp(-\lambda t)}{\int_t^\infty(\lambda\xi)^{k-1}\exp(-\lambda\xi)d\xi} \tag{77}$$

其中k為形狀參數、λ為尺度參數，$\Gamma(\cdot)$為伽瑪函數：

$$\Gamma(k)=\int_k^\infty u^{k-1}\exp(-u)du$$

當k為整數時，其數值為$(k-1)$的階乘，亦即：

$$\Gamma(k)=(k-1)!$$

6.5.2 數學期望值

伽瑪分佈的平均值與變異數分別為：

$$E[T] = k\theta \tag{78}$$

$$V[T] = k\theta^2 \tag{79}$$

6.5.3 特性描述

圖 9 為伽瑪分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數。當 $k=1$ 時則為指數分佈，$k<1$ 時為初期失效型分佈，$k>1$ 時為磨耗失效型分佈，此一特性類似韋伯分佈，但是在韋伯分佈的失效率隨時間增大而收斂於零或無限大，而當時間為無限大時伽瑪分佈的失效率趨近於常數值 $h(t)=1/\theta$，在選用分佈種類時需注意此一特性。

6.5.4 應用說明

在實用上，由於伽瑪分佈參數的推定比韋伯分佈難，而且也沒有建立機率圖可資應用，因此一般並不常用。不過在應用貝氏統計時，伽瑪分佈因為分析容易而常用以說明具有隨機特性的失效時間或壽命等可靠度參數。

伽瑪分佈是不規則的波桑式衝擊累積 k 次才失效的模型，可應用於不連續負荷作用 k 次時就失效的產品，例如沖洗閥、開關之類使用方式不規則，為隨機方式，其偏差以失效前的次數偏差大時，產品壽命的機率性質主要取決於使用次數的分佈，此時，失效前的使用次數 k 可近似視為一定值，在 t 時間的不可靠度可當成在 t 內有不連續負荷作用 k 次以上的機率，適用伽瑪分佈。

6.6 二項分佈的特徵與應用

6.6.1 機率密度函數與累積分佈函數

在許多工程測試中，若每次測試都符合下列假設條件：

(1). 每次測試僅有兩種可能發生的結果，某事件發生或不發生；

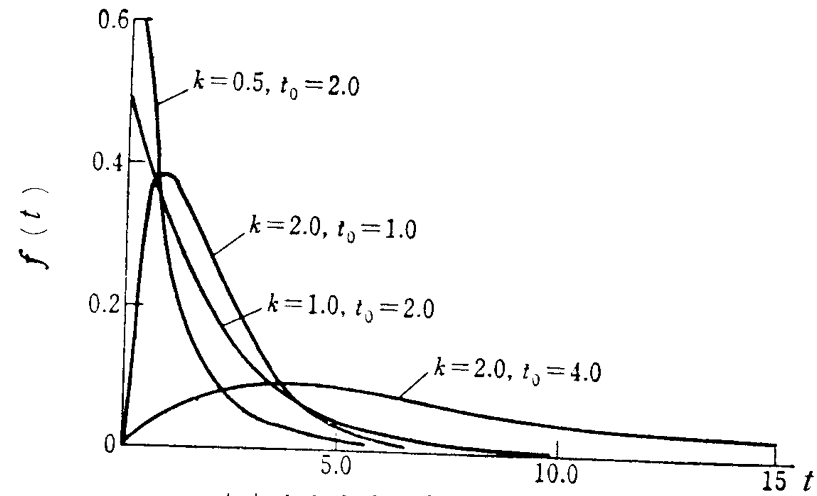
(2). 該事件發生的機率，在每次測試中恒為常數；

(3). 每次測試在統計上均為彼此相互獨立。

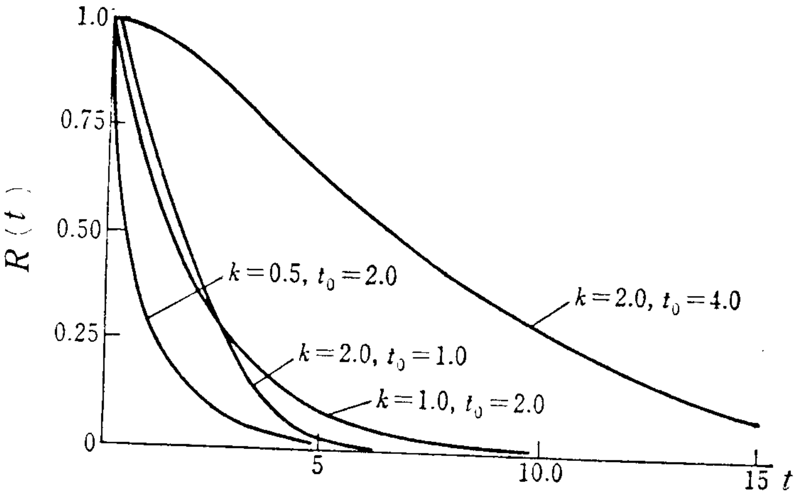
滿足上述條件的事件所構成的序列稱為柏努利序列(Bernoulli sequence)。假設每一次測試中，事件發生的機率為 p，不發生的機率為 $1-p$，則在做了 n 次連續測試的柏努利序列中，事件 A 發生 r 次的機率 f(r)為斷續型機率分佈，可表示成：

$$f(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, r = 0,1,2,\cdots,0 < n,0 < r \tag{80}$$

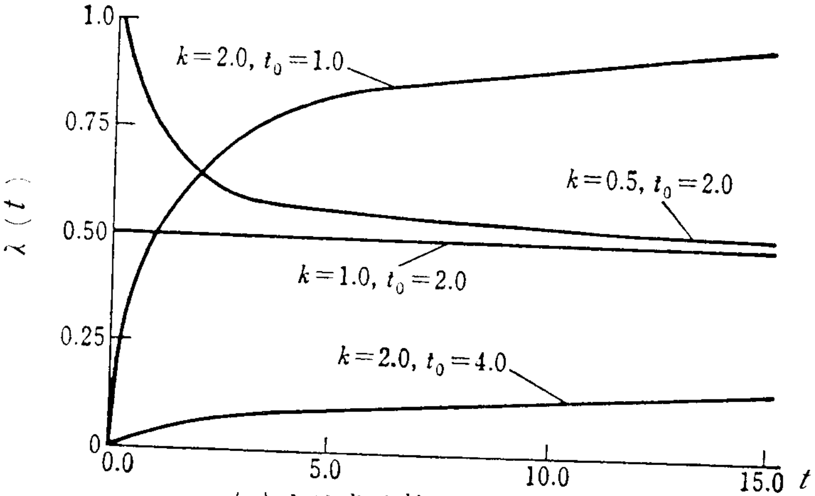
滿足上式的機率分佈稱為二項分佈(binomial distribution)，一般記為 $\text{bin}(r;n,p)$，二項分佈兩 n 及 p 兩個參數。



(a) 機率密度函數



(b) 可靠度函數



(c) 失效率函數

圖 9: 伽瑪分佈之機率密度函數、可靠度函數及失效率函數曲線

6.6.2 數學期望值

二項分佈的平均值 E[r] 與變異數 V[r] 分別為：

$$E[r] = np \tag{81}$$

$$V[r] = np(1-p) \tag{82}$$

6.6.3 特性描述

典型的二項分佈如圖 10 所示。

6.6.4 應用說明

二項分佈常用於電鍍的缺痕分佈、電話的接線錯誤分佈、機械性缺陷分佈、矽晶片的缺陷數之類計數型數據、半導體積體電路的良品率評估，以及成敗型系統的可靠度或成功機率等。另外，二項分佈也常用於計算複雜的 n 中取 k 系統或複聯系統的可靠度。

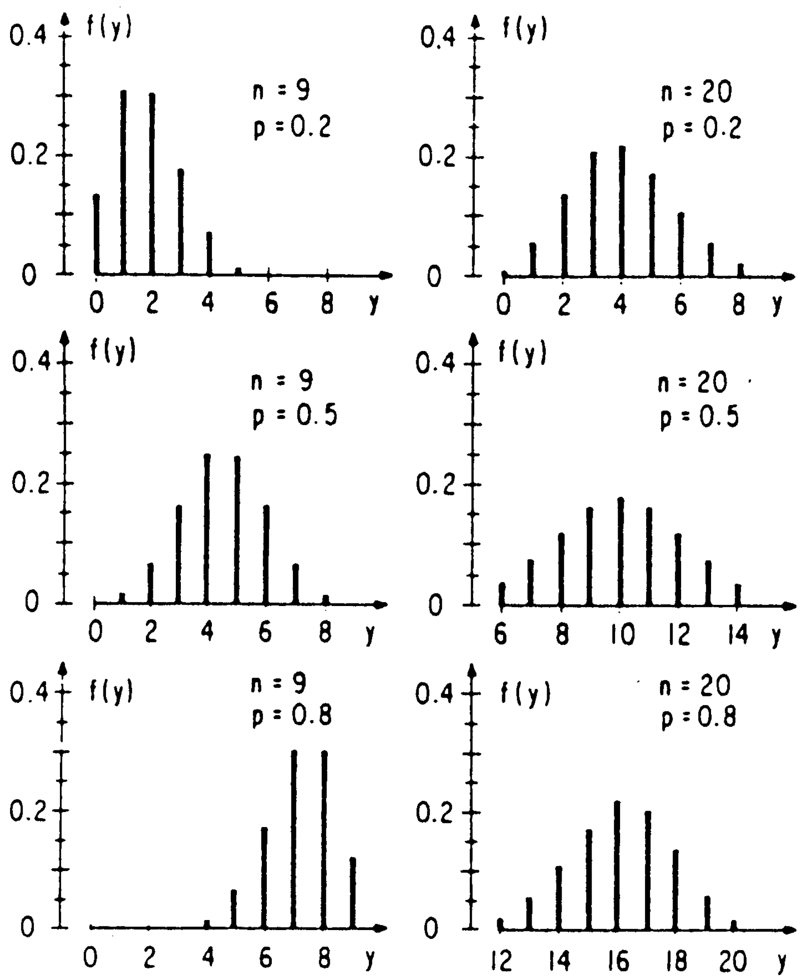


圖 10 二項分佈機率密度函數

6.7 波桑分佈

6.7.1 機率密度函數與累積分佈函數

有些工程與物理問題，可能是在時間上或空間上的任何一點發生的事件，這種時間或空間的問題，亦可用柏努利序列來處理，只要將所討論問題的時間或空間領域劃分為若干小區間，並假設在任何小區間只有事件發生或不發生兩種可能性。但若事件可發生在任何時間或空間上的任何一點，則該事件可能在某時間或空間區間內發生一次以上，在此種情況下，利用波桑序列(Poisson sequence)或波桑過程(Poisson process)較能描述事件發生的情形。

波桑過程係基於下列假設而得：

(1). 事件可隨意發生時間上或空間上的任何一點；

(2). 某已知時間或空間內，該事件發生與否，並不影響與該區間不相重疊的其他區間內，該事件是否發生的機率；

(3). 在小區間內 Δt 裡，事件發生的機率與 Δt 成正比，可用 $\nu\Delta t$ 表示。此處 ν 為該事件平均發生率，可假設為常數，並且在小區間內事件發生兩次或兩次以上的機率，因其太小為 Δt 的高階項可略而不計。

基於這些假設，若考慮某事件在特定時間 t 內發生的次數，則此一次數為隨機變數。亦即，若以 X_i 代表在時間或空間區間 t 內某事件發生的次數，則發生機率為：

$$P(X_i = x) = \frac{e^{-\nu t}(\nu t)^x}{x!}, x = 1,2,\cdots,0 < \nu,0 < t \tag{83}$$

滿足上式條件即為波桑分佈(Poisson distribution)，一般記為 $poi(r;\nu,t)$，此處 ν 為事件的平均發生率(mean occurrence rate)，亦即事件在單位時間或空間內發生的平均次數，而在時間或空間 t 內發生的次數為 νt。

6.7.2 數學期望值

波桑分佈的平均值與變異數都等於 νt，亦即：

$$E[r] = \nu t \tag{84}$$

$$V[r] = \nu t \tag{85}$$

6.7.3 特性描述

柏努利序列與波桑過程有相同與相異之處，在某種情形下，波桑分佈可視為二項分佈的近似分佈，亦即，當二項分佈的期望值 $np = m$ 為定值，而 $p \to 0$、$n \to \infty$ 時，二項分佈的機率密度函數變成：

$$f(r) = \frac{e^{-m}m^r}{r!}, r = 0,1,2,\cdots,0 < m$$

實際上，若是$p \le 0.1$，二項分佈可用波桑分佈近似，可靠度數據常討論不良率 p 小的領域，其分析主要用波桑分佈，以 m 為參數的波桑分佈如圖 11 及圖 12 所示，當 m增大的話，波桑接近常態分佈。

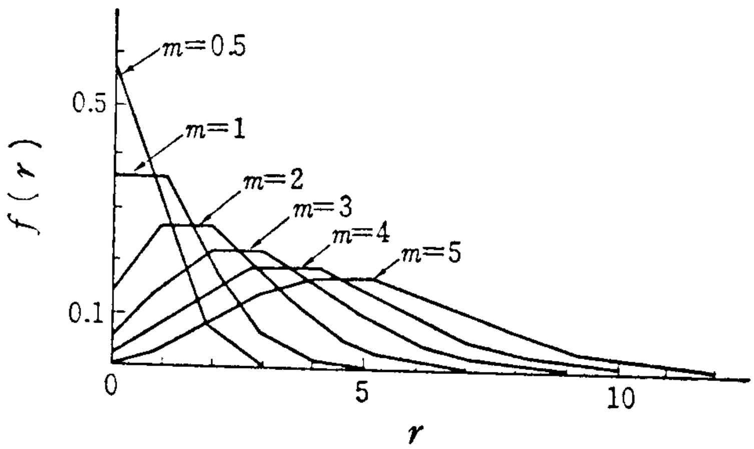


圖 11: 波桑分佈機率密度函數

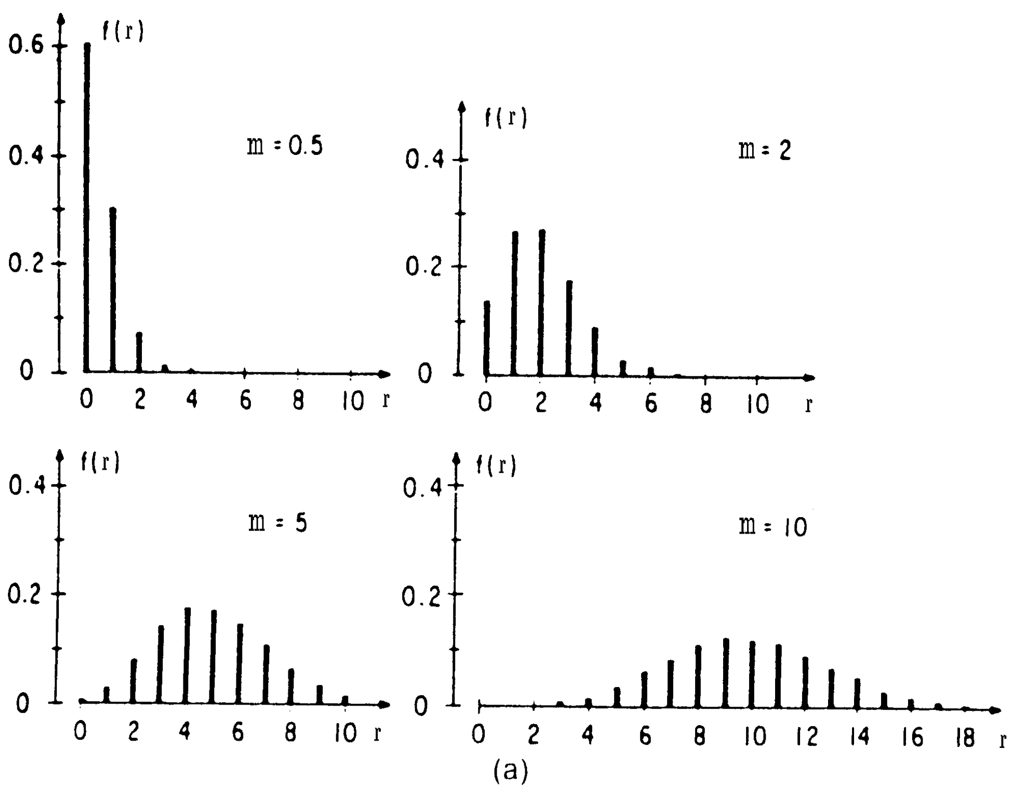


圖 12: 波桑分佈機率密度函數

把上述波桑分佈用於可靠度問題時，用時間 t 取代試件數 n，用失效率 λ 取代不良率 p，用操作 t 小時後的期望失效數 λt 取代參數 m 即可，亦即：

$$f(r)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{r}}{r!},r=0,1,2,\cdots,0<\lambda,0<t \tag{85}$$

此式表示操作 t 時間中，發生 r 個失效的機率，在此設 r=0，及可求得指數分佈的可靠度函數，如此，波桑分佈與指數分佈成表裡關係。

6.7.4 應用說明

波桑分佈可應用於策訂壽命試驗抽樣計畫、維修用備份零件數的決定等。

7 可用度理論

可用度概念原來是為一些可維修的系統提出的，這些系統需要連續(日夜)地工作，而要求在任一隨機時刻，或是處於工作狀態、或是由於失效而「停機」時努力維修工作，以便在最短的時間內恢復工作。在最初的概念中，認為系統僅有兩種可能的狀態(即處於工作或處於維修)，並把可用度定義為系統，在經受由「開機」和「停機」構成的連續交替更新循環過程後，能夠在任一隨機時刻正常工作的機率，也就是說，可用度是可靠度與維護度參數的組合。

為簡單說明起見，只考慮連續工作的單台設備，如果對設備在某一時間間隔工作或停機的情況保持記錄，便可能把設備的可用度描繪成如下所示的由分佈函數 $H(A)$ 定義的隨機變數。

可用度的期望值就是在所有可能的變數範圍內，$H(A)$ 函數的平均值，另一方面，當討論系統穩態可用度時，還要考慮設備總體的特性，如果有許多設備已經工作一段時間，則在任一特定時刻，應當期望處於 0(可用的)狀態的設備數量是 NP_0。因此，可用設備數與設備總數的比值就是 $NP_0/N=P_0$。

7.1 基本概念

系統可用度可按下列方式定義：

1. 瞬時可用度 $A(t)$：系統開始工作之後，在任一隨機時刻 t 可供使用的機率。
2. 任務可用度 $A_m(t_2-t_1)$：在任務期間，系統可以使用的時間在時間間隔(t_2-t_1)中所佔的比例，亦即

$$A_m(t_2-t_1)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}A(t)dt$$

這個參數也叫做平均可用度(A_{av})。

3. 穩態可用度 A_s：系統在開始工作之後，當時間 t 變得很長或當 $t\to\infty$ 時，在時刻 t 的某一點可以使用的機率，亦即：

$$A_s = \lim_{t\to\infty} A(t)$$

4. **實有可用度** A_a **：**

$$A_a = 1 - \frac{\text{停機時間}}{\text{總時間}} = \frac{\text{開機時間}}{\text{總時間}}$$

其中停機時間包括所有維修時間(預防性及改正性的維修時間)、行政時間及後勤時間。

5. **固有可用度** A_i **：**

$$A_i = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

A_i **不包括行政時間及後勤時間；事實上，它一般也不包括預防性維修時間。** A_i **主要是設備與系統基本設計的函數。**

瞬時可用度、任務可用度、及穩態可用度等 3 **種可用度如圖** 13 **所示。**

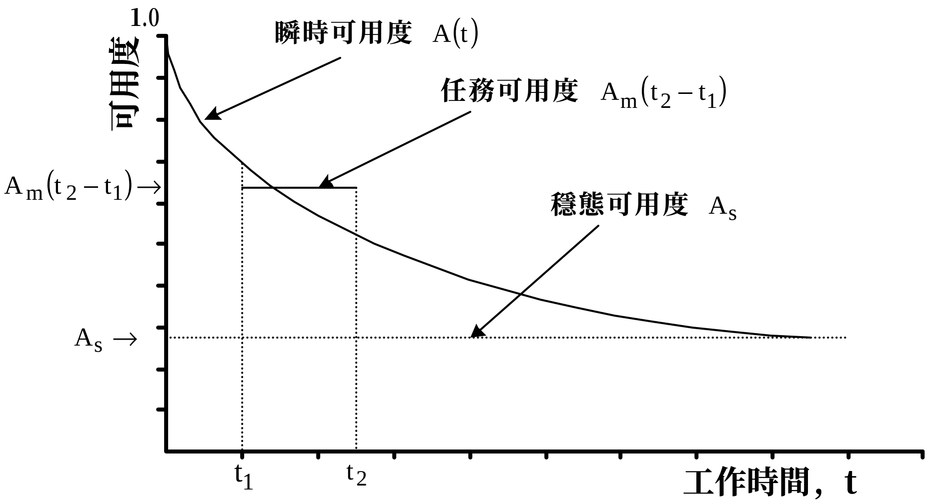


圖 13**：瞬時、任務、與穩態可用度之間的關係**

7.2 可用度模型的建立

7.2.1 概述

在複雜系統的可用度研究中，馬可夫過程是有用的數學模型，馬可夫過程的基本概念是系統「狀態」(如：工作、不工作)及狀態「轉換」(由工作狀態到由於失效而處於不工作狀態，或從不工作狀態到由於維修而處於工作狀態)的概念。

馬可夫過程由從狀態 i 到狀態 j 的轉換機率定義的一組機率 P_{ij} 來定義，馬可夫過程模型最重要的特徵之一就是轉換機率 P_{ij} 只決定於狀態 i 與狀態 j，而與所有以前的狀態(最後一個狀態，即狀態 i 除外)無關，此外 P_{ij} 也不隨時間變化。

在利用馬可夫過程建立系統可用度模型時，應該做出下列補充假設：

1. 在時間(t, t+dt)發生失效的條件機率為 λdt ；
2. 在時間(t, t+dt)完成維修的條件機率為 μdt ；
3. 同時出現兩次或更多次失效或維修的機率為零；
4. 每次失效或維修的事件與所有其他事件無關；
5. 失效率 λ 與修復率 μ 為常數(如：指數分佈)。

7.2.2 單台設備可用度分析

馬可夫過程用於簡單的單台設備的可用度分析說明如後，該設備的失效率為 λ、修復率為 μ，則在 $(t, t+dt)$ 時的失效條件機率為 λdt，在 $(t, t+dt)$ 完成修復的條件機率為 μdt。單機設備的可用度，亦即設備在時刻 t 能夠工作(狀態 0)的機率為：

$$A(t) = P_0(t)$$

而設備在 t 時不能夠工作(狀態 1)的機率為 $P_1(t)$，$P_0(t)$ 與 $P_1(t)$ 的關係為：

$$P_0(t) + P_1(t) = 1$$

同理可推導得系統在 $t + dt$ 處於狀態 0 及狀態 1 的機率分別為：

$$P_0(t+dt) = P(t)(1-\lambda dt) + P_1(t)\mu dt$$

$$P_1(t+dt) = P_0(t)\lambda dt + P_1(t)(1-\mu dt)$$

依此關係，可建立下列微分方程式組：

$$P_0^{'}(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$P_1^{'}(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t)$$

上述微分方程式加上初始條件 $P_0(0) = 1$ 及 $P_1(0) = 0$，可利用拉普拉斯轉換處理求解得可用度為：

$$A(t) = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$A_m(t_2-t_1)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}A(t)dt$$
$$=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]dt$$
$$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2(t_2-t_1)}e^{-(\lambda+\mu)(t_2-t_1)}$$

$$A_s=\lim_{t\to\infty}A(t)$$
$$=A(\infty)$$
$$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}}$$

當$\lambda=\frac{1}{MTBF}$及$\mu=\frac{1}{MTTR}$，穩態可用度變為：

$$A_s=\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$$

一般而言，μ的值要比λ大得多，因此A_s可以寫為：

$$A_s=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}}=1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{2}{\mu^2}-\cdots\cong 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

如前所述，瞬時部分減小速度比較快，而且在時間為$\frac{4}{\lambda+\mu}$時，由於瞬時部分變得非常小，因此可以忽略不計，如圖 14 所示。亦即達穩態可用度的時間為：

$$t_s=\frac{4}{\lambda+\mu}$$

如果修復率μ比失效率λ大得很多，則穩態時間可近似簡化為：

$$t_s=\frac{4}{\mu}$$

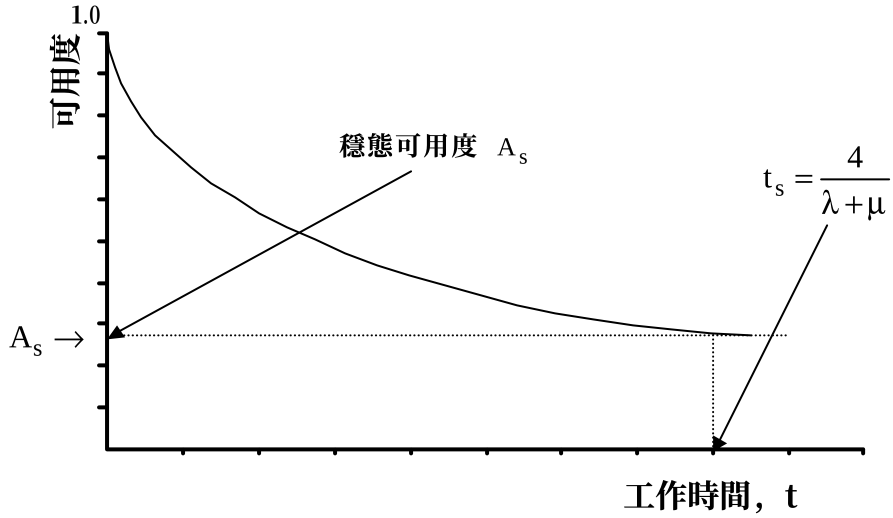


圖 14：可維修單機設備可用度

7.3 可用度和可靠度與維護度之關係

系統的有效度和成本有效性模型是進行系統權衡研究的最好工具，由於複雜性所致，這些模型大多數是電腦化的。利用電腦化的模型可以在大量的效能、任務輪廓、可靠度、維護度、後勤支援、及其它參數發生任何變化時，立即估計這種變化對系統有效度與總成本所產生的影響。因此，成本有效度模型建立與估算，除了可以用來從許多競爭的備選方案中選擇特定的系統設計方案，而且為了對從系統到零件層級的權衡研究所進行參數敏感度研究與最佳化設計，都是一種強而有力的工具，最佳化的設計是為了在給定的的預算與生命週期成本限制內，提供最有效的系統，或者具有預期的有效度水準的最經濟的系統。

然而，權衡研究往往僅限於達到規定的 系統有效度並符合規定的可靠度與維護度需求，特別是對比較簡單的系統來說，更是如此。因此，也就可使用本節所示的那些比較簡單的權衡技術。

可靠度與維護度共同決定系統的固有可用度，因此，當規定了可用度需求時，需要在可靠度與維護度之間進行權衡的可能性很大，因為在穩態時，可用度僅決定於 MTTR 和 MTBF 之比。這個比關係到維修時間比(MTR)，並用符號α表示，即：

$$\alpha = \frac{MTTR}{MTBF}$$

因此，固有可用度公式為：

$$A_i = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} = \frac{1}{1+\alpha}$$

參考文獻

1. Ang, A.H.S. & Tang, W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. I, Wiley, New York, 1975
2. Ang, A.H.S. & Tang, W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II, Wiley, New York, 1984
3. Barlow, R.E. & Proschan, F., Statistical Theory and Life Testing, Holt, Rinehart and Winston, NY, 1975
4. Blanks, Henry S., Reliability in Procurement and Use: from specification to replacement, John Wiley & Sons, 1992
5. Bompass-Smith, J.H., Mechanical Survival: The Use of Reliability Data, McGraw-Hill, London, 1973
6. Carter, A.S.D., Mechanical Reliability, Wiley, NY, 1972
7. Carter, A.S.D., Mechanical Reliability, 2nd ed., MacMillan Education Ltd, London, 1986
8. Dhillon, B.S. & Singh, C., Engineering Reliability: New Techniques and Applications, Wiley, NY, 1981
9. Dhillon, B.S. & Singh, C., Reliability Engineering in Systems Design and Operation, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983
10. Dhillon, B.S., Mechanical Reliability: Theory, Models and Applications, AIAA, Inc, Washington, DC, 1988
11. Green, A. & Bourne, A.J., Reliability Technology, Wiley & Sons, NY, 1972
12. Grosh, D.L., A Primer of Reliability Theory, John Wiley & Sons, New York, 1989
13. Henley, E.J. & Kumamoto, H., Reliability Engineering and Risk Assessment, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981
14. Ireson, W.G. (ed), Reliability Handbook, McGraw-Hill, New York, 1965
15. Jensen, F. & Peterson, N.E., Burn-In, John Wiley, New York, 1982
16. Kapur, K.C & Lamberson, L.R., Reliability in Engineering Design, Wiley, New York, 1977
17. Kececioglu, D., Reliability Engineering Handbook Vol 1&2, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991
18. Knezevic, Jezdimir, Reliability, Maintainability and Supportability: A probabilistic approach, McGraw-Hill International Edition, 1993
19. Lawless, J.F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data, 1982
20. Lloyd, K. & Lipow, M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 1st ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1962
21. Lloyd, K. & Lipow, M., Reliability: Management, Methods and Mathematics, 2nd ed., by Authors, 1972
22. Mann, N., Schafer, R.E. & Singpurwaller, N.D., Methods for Statistical Analysis of Reliability Data, Wiley & Sons, New York, 1974

23. Martz, H.F. & Waller, R.A., Bayesian Reliability Analysis, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1982, 1991

24. Myers, R.H., Wong, K.L. & Gordy, H.M., Reliability Engineering for Electronic Systems, John Wiley & Sons, New York, 1964

25. O'Connor, P.D.T., Practical Reliability Engineering, 1st ed., Heyden & Son, London, 1981

26. O'Connor, P.D.T., Practical Reliability Engineering, 2nd ed., Wiley & Sons, London, 1985

27. Papoulis, Athanasios, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 2nd ed., McGraw-Hill Inc., 1984

28. Ramakumar, R., Engineering Reliability: Fundamentals and Applications, Prentice-Hall, Inc., 1993

29. Rao, S.S., Reliability-Based Design, McGraw-Hill, New York, 1992

30. Sandler, G.H., System Reliability Engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963

31. Shooman, Martin L., Probabilistic Reliability: An Engineering Approach, McGraw-Hill, New York, 1968