可靠度技術手冊

可靠度配當技術

彭鴻霖 編著

中華民國八十六年十一月三日

可靠度配當技術

目 錄

可靠度配當技術

1 前 言

任何一個系統(system)或裝備(equipment)，從其組成架構來看是由許多組件(components)所組合構成的。此處的組件乃是泛指構成系統的任何一個組合層次(indenture level)，包括次系統(subsystem)、單機(unit)、模組(module)、零件(part)。可靠度配當是有關可靠度需求資源分配的技術，經由適當的模型與考量因素，將系統的可靠度需求轉換成系統以下的各個組合層次物品可靠度需求。可靠度配當為由上向下的過程，配當的深度依研製計畫的特性而定，隨著研發工作的進展，當設計資料愈詳細時，應該儘可能將可靠度配當至最低的組合層次。

本報告先說明可靠度配當之基本原理，探討影響物品可靠度的各項考量因素，包括成本、重要性、複雜性與零件數量、任務需求與環境條件、維護性、設計成熟度與技藝水準等，各項因素對於物品可靠度的影響趨勢。這些因素之間的差異，可根據不同的理論基礎，找尋每一項因素在進行可靠度配當的權重因子(weighting factor)，然後配合可靠度模型的應用，即可將系統的可靠度需求配當至各個組合層次的物品。其次討論等量配當法、ARINC配當法、AGREE配當法及評點配當法等數種常見的可靠度配當方法，分別敘述各種配當法的理論基礎、假設條件、配當程序，並且以實例說明之。

2 可靠度配當原理

當系統計量的可靠度需求確定之後，就應將之配當或指定至系統的構成元件。可靠度配當工作有很多技巧可以利用，但是將系統需求條件轉移到可以控制的較低組合層次的目的則是一致的。即使初期的配當結果很粗略，但仍然可以提供一些掌握可靠度計畫管理所需資源範圍的資料給管理人員作參考。

當較低層次的可靠度需求確定之後，就應將之交由負責該物品的工程人員，並且將配當作業所產生的可靠度需求，作為建立維護度、安全性、品質工程、後勤支援及試驗規劃等相關作業重要的基礎輸入資料。以下說明進行可靠度配當作業之目的，如何建立可靠度方塊圖、簡述可靠度模型的分類，進行可靠度配當作業之考量因素，以及可靠度配當技術在研發過程之應用。

2.1 可靠度配當之目的

可靠度配當之目的為：

(1). 將系統可靠度目標值分配至每一分系統、單機、零組件等層次之可靠度目標值，建立各個組合層次可靠度目標需求的基礎。

(2). 根據可靠度目標設定值，設計人員可以評估分項的狀況，並決定主要問題的範圍及系統的弱點所在。

(3). 使物品設計人員對系統的任務輪廓及構成組件相互之間的介面關係有更深的認識，例如：

A. 零組件在系統功能上所扮演的角色。

B. 零組件達成系統功能的方法。

C. 零組件的複雜性、數目、...等。

D. 改變零組件對系統功能所造成的影響。

(4). 考慮系統之成本、重量與可靠度等因素加以權衡擇適(trade-off)，取得更符合經濟效益的設計產品。

2.2 可靠度配當在研發過程之應用

在研發過程，可靠度配當應配合可靠度模型訂定、可靠度預估等工作項目，其程序說明如下：

(1). 裝備說明；

(2). 功能陳述與失效定義；

(3). 操作或維修條件定義；

(4). 功能方塊圖建立；

(5). 可靠度方塊圖建立；

(6). 可靠度數學模型建立；

(7). 可靠度配當；

(8). 可靠度預估；

(9). 可靠度再配當，或對較低組合層次進行可靠度配當。

在整個研發設計過程中，性能、重量、空間、生命週期成本、維修概念、採購前置時間等項目的擇優設計與敏感度分析，往往需要執行好幾次，而可靠度配當通常只需要執行一次，若設計變更或形態改變時，可依上述程序適時更新，頂多再作一次或兩次的重新配當，整個可靠度配當作業邏輯如圖1所示。

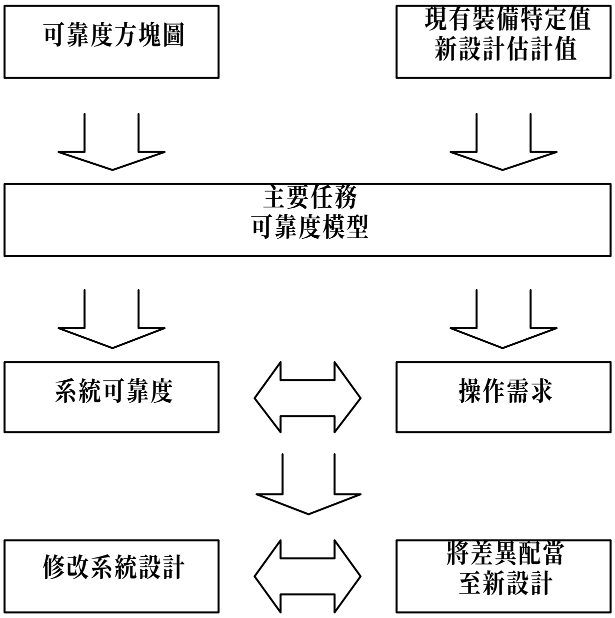

圖1：可靠度配當邏輯

除少數特殊應用的系統或裝備之外，在產品設計時，應儘可能多採用成熟的、經驗證過的元件，以便儘早掌握其可靠度並可節省設計、製造費用。只有可靠度不能達到新產品需求的少數元件，才需要改進設計或進行重新設計。

2.3 可靠度模型

進行可靠度配當作業之前，首先應根據系統的任務需求、設計理念的特性、功能方塊圖等資料，由上而下，然後由系統在執行任務時所扮演的角色與構成組件相互之間的關係，建立系統可靠度與分項可靠度之間的關係，亦即可靠度模型。要建立系統可靠度模型，可將系統的每一分項視為一方塊，建立可靠度方塊圖(reliability block diagram, RBD)，並且建立適切說明各方塊物品可靠度特性的數學模型。由可靠度方塊圖配和可靠度模型(reliability model)，選擇適當的可靠度配當模型即可進行可靠度配當工作。系統可靠度方塊圖之建立首先應依據之各分項之識別編碼及相互間的關係，定義各分析分項之功能方塊圖，說明分析系統與分項之操作模式及提供功能的操作時序，以利分項任務功能分析及失效定義之用，並依各分項之功能特性及失效定義，其相互之間的串、並聯關係圖，建立系統之可靠度方塊圖。

2.4 可靠度配當考量因素

系統可靠度配當的關鍵在於求解基本的不等式：

$$f\left(R_1, R_2, \cdots, R_n\right) \geq R_s^* \qquad (1)$$

式中， $f\left(R_i, i=1,n\right)$ 系統可靠度與分系統可靠度間的函數關係；

R_s^* 系統的可靠度指標；

R_i 第 i 個分系統的可靠度指標。

對於簡單的串聯系統而言，式(1)變成為：

$$R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t) \geq R_s^*(t) \tag{2}$$

如果對配當沒有任何約束條件的話，式(1)可以有無數解。因此，問題在於要確定一個方法，通過它可以得到合理的可靠度配當值的唯一解或有限數量解。

在進行可靠度配當時，有一些必須遵循的準則，主要係從任務需求重要性、環境條件、複雜性(零件數量)、安全性、成本、以及設計成熟度、技藝水準等因素考量對各分項可靠度的可能影響程度，並且在研發設計時求取這些因素間的平衡，以獲得較佳的分系統可靠度配當組合。一般在執行可靠度配當時經常考慮的因素及其內涵說明如下：

(1). 重要性(importance or criticality)：某些分項的失效，對全系統功能之發揮及任務之達成不會產生關鍵性影響，亦即該分項的重要性低；但某些分項只要發生失效，全系統隨即失效，任務亦將無法達成，則此分項的重要性高。因此，對於重要性高的分項應該配當較高之可靠度目標值，因為重要性高的產品的失效會影響到人員、財物或任務的完成，而重要性低的分項則可配當較低之可靠度。

(2). 環境條件(environmental conditions)：在嚴重惡劣的環境操作使用的分項比較容易發生失效，因此對於此類分項，應賦予較低的可靠度配當值，至於較不易受環境影響的分項，則可配當較高之可靠度目標值。

(3). 複雜性(complexity)：分項所包含的零件組件較多，則失效的機率亦愈大，要達到高可靠度就越困難並且更為費錢，故應配予較低之可靠度值；反之，若系統之零組件較少，則應配予較高之可靠度值。

(4). 安全性(safety)：若某分項失效時，對操作人員將造成重大危害，如彈頭及發動機等對安全性有嚴重影響者，應提高其可靠度配當水準，反之則降低。

(5). 成本(cost)：一般而言，系統及其組件的研究發展均需耗費成本，有的需要相當昂貴的研究發展成本，若可靠度配當過高，則需耗費鉅額成本，有的則對發展高可靠度水準不需鉅額費用。因此，在經濟效益原則之考慮下，對低成本之分項，其可靠度配當水準應予提高，成本較高者則可降低其可靠度配當值。

(6). 維護性(maintainability)：某分項易於維修，一旦發生失效，能在極短時間內完成維修工作，且不影響全系統功能及任務，則可降低其可靠度配當水準，反之則可靠度配當水準較高。

(7). 技藝水準(state of art)：以目前科技水準而論，有些分項的發展歷史已相當久遠，要提升科技水準，除非有突破性發展，否則很難達成，故應配當較低的可靠度值，但某些硬品發展歷史較短，仍可能有突破性科技進展，因此應可配當較高的可靠度值。

各項考慮因素與可靠度之關係如表 1 所示。

表1：可靠度配當考量因素評點原則

因素	因素效應	偏好離差	可靠度水準
重要性	低	高	低
環境條件	差	高	低
複雜性	高	高	低
安全性	低	高	低
成本	高	高	低
維護性	易	高	低
工藝水準	低	高	低

2.5 可靠度配當方法分類

可靠度配當主要應用於訂定較高組合層次可靠度規格，這些層次的可靠度模型大多為串聯模型，因此大部份的配當方法多是串聯系統為基本假設。除了串聯假設之外，大多假設系統及每一構成元件的失效特性均為指數分佈。因此，有的配當方法是以平均失效間隔時間(MTBF)或失效率表示物品的可靠度而做配當的，由於此類配當法係利用簡單的代數運算與近似式觀念做配當工作，這種配當方法稱為代數法，由於這種配當方法並不考慮任何其他約束條件，因此又稱為無約束條件可靠度配當法。另外，亦有的方法考慮的層次較為複雜，同時考量成本、重量、體積、消耗功率等約束條件，並且利用動態規劃法或拉格朗日乘數法等最佳化觀念做配當工作，這種方法稱為分析法，相對於無約束條件配當法，又稱為有約束條件可靠度配當法。

3 無約束條件可靠度配當法

如前所述，常用的可靠度配當大多是無約束條件配當法，同時基於實務考量，在此僅就一些常見串聯系統可靠度配當方法，簡單說明其原理與作業程序，計有：

(1). 等量配當法；

(2). ARINC 配當法；

(3). AGREE 配當法；

(4). 評點配當法。

以下分別敘述各種配當法的理論基礎、假設條件、配當程序，並且以實例說明之。

3.1 等量配當法

等量配當法(equal allocation)乃將每一個系統構成元件可靠度所需考量的所有因素，如成本、安全性、重要性、複雜性、環境條件等，均視為對系統具有相同的影響程度而加以配當，適合於當對影響各個元件可靠度的因素尚未瞭解時所作的初步配當。

假設一個由n個元件所構成、可靠度目標值為R_s的系統，而且系統可靠度與元件可靠度間為串聯的關係式，亦即：

$$R_s = R_1 R_2 \cdots R_n \tag{1}$$

其次假設每一項考量因素對每一個元件均具有相同的權重因子，亦即：

$$R_1 = R_2 \cdots R_n = R_i \tag{2}$$

將式(2)代入式(1)中，可得到：

$$R_s = (R_i)^n \tag{3}$$

因此，第i個元件的可靠度配當值為：

$$R_i = R_s^{1/n} = R_s^{w_i} \tag{4}$$

亦即第i個元件的配當權重因子w_i為：

$$w_i = \frac{1}{n} \tag{5}$$

3.2 ARINC配當法

ARINC配當法是美國Aeronautical Radio Inc.於1958年所發表的可靠度配當法，其原理乃在各元件為串聯的前提下，且假設各元件之任務時間與系統之任務時間皆相同，以及所有失效率皆為常數，亦即失效時間呈指數分佈。

假設系統係由n個元件所構程的，系統可靠度目標值為$R_s = \exp(-\lambda_s t)$。配當時，先應用經驗資料計算各元件之失效率預估值(λ_i)，利用下列關係式先求得第i項元件之權重因子(w_i)，然後計算第i項元件之可靠度配當值(R_i)，其計算式說明如下：

$$w_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{6}$$

$$R_i = R_s^{w_i} \tag{7}$$

[範例] 假設有一由五個分系統串聯組成的電子裝備，其系統整體可靠度目標為0.998，各分系統利用可靠度預估方法求得的分系統失效率值如下表所示，若任務時間t=1小時，試利用ARINC配當法進行各分系統之可靠度配當。

元件	失效預估值(fr/hr)
1	0.0001
2	0.0002
3	0.0003
4	0.0004
5	0.0005

[解答]：

由下式可靠度與失效率之關係：

$$R_s = \exp(-\lambda_s t)$$

已知系統可靠度為0.998，任務時間t=1小時，可得系統失效率λ_s為：

$$\lambda_s = 0.002\ \mathrm{fr/hr}$$

又由附表可知：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}\lambda_i &= 0.0001 + 0.0002 + 0.0003 + 0.0004 + 0.0005 \\ &= 0.0015\end{aligned}$$

故可計算得第1個元件的配當權重因子為：

$$w_1 = \frac{0.0001}{0.0015} = 0.0667$$

第1個元件的配當可靠度值為：

$$R_1 = \exp(-0.002 \times 1)^{0.0667} = 0.99987$$

同法可計算得其他四個元件的配當權重因子分別為：

$$\begin{aligned}w_2 &= 0.1333 \\ w_3 &= 0.2000 \\ w_4 &= 0.2667 \\ w_5 &= 0.3333\end{aligned}$$

可靠度配當值分別為：

$$R_2 = 0.99973$$
$$R_3 = 0.99960$$
$$R_4 = 0.99947$$
$$R_5 = 0.99933$$

3.3 AGREE配當法

AGREE配當法為美國電子裝備可靠度顧問團(Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment, AGREE)於1957年發表之可靠度配當法，主要的特點在強調配當時同時考量元件的複雜性及關鍵性(或稱重要性)，這種配當法主要用於將分系統可靠度配當至裝備或單機時。為簡化說明起見，仍然以目標物品為「系統」，欲進行配當的對象稱為「元件」。

進行配當時假設元件的複雜性與其組成模組數目(或零件數目)的多寡成正比，故可以用元件的模組數目(n_i)與系統所含的總模組數目(N)之比例表示。而關鍵性(c_i)則以該元件發生失效時影響系統功能的程度表示，就元件對系統之影響而言，最嚴重者為分項失效直接造成系統失效，此時分項的關鍵性為1，而對系統不具影響的元件，則其關鍵性為零。

假設系統為串聯系統且可靠度為R_s，其可靠度模型為：

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t) = \prod_{i=1}^{k} [1 - (1 - R_i(t))]$$

上式中R_i為第i個元件的可靠度。

第i個元件的關鍵性指標為c_i，則

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{k} [1 - c_i(1 - R_i(t))]$$

由於第i個元件是由n_i個模組所構成的，這些模組不論是存在於那一個元件上，其對系統可靠度的作用是相同的，所以

$$R_i(t) = 1 - c_i(1 - R_i(t)) = [R_s(t)]^{n_i/N}$$

所以,

$$R_i(t) = 1 - \frac{1 - [R_s(t)]^{n_i/N}}{c_i} \tag{8}$$

若各個元件的失效時間呈指數分佈，亦即：

$$R_i(t_i) = \exp(-\lambda_i t_i)$$

式中$R_i(t_i)$**為指定操作時間**t_i**時第i個元件之可靠度配當值。**

當λ_i**值很小時，可用下式近似，亦即：**

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \approx 1 - x$$

經過下述運算過程,

$$R_i(t_i) = [1 - c_i[1 - \exp(-\lambda_i t_i)]] = (R_s(t_i))^{n_i/N}$$

$$[1 - c_i[1 - (1 - \lambda_i t_i)]] = (R_s(t_i))^{n_i/N}$$

$$1 - c_i\lambda_i t_i = (R_s(t_i))^{n_i/N}$$

又由於等號左式可以下式近似表示之,

$$1 - c_i\lambda_i t_i \approx \exp(-c_i\lambda_i t)$$

因此可得：

$$\exp(-c_i\lambda_i t) = (R_s(t))^{n_i/N}$$

將上式兩邊取對數處理,

$$-c_i\lambda_i t = \frac{n_i \ln(R_s(t))}{N}$$

可得各元件的失效率配當值計算式為：.

$$\lambda_i = \frac{n_i[-\ln(R_s(t))]}{c_i N t} = \frac{n_i}{N}\frac{1}{c_i}\frac{-\ln[R_s(t)]}{t_i} \qquad (9)$$

在失效時間為指數分佈的假設下，平均失效間隔時間(θ)**為失效率之倒數，亦即：**

$$\theta_i = \frac{N \cdot c_i \cdot t}{n_i \cdot [-\ln[R_s(t)]]} = \frac{N}{n_i}\frac{c_i}{1}\frac{t_i}{-\ln[R_s(t)]}$$

又依照下列近似式可得另一可靠度配當值的表示法，其演算過程如下：

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{1}{2!}(x\ln a)^2 + \cdots \approx 1 + x\ln a$$

$$R_i(t_i) = 1 - \frac{1-[R_s(t)]^{n_i/N}}{c_i} \approx 1 - \frac{1-\left\{1+\frac{n_i}{N}\ln[R_s(t)]\right\}}{c_i}$$

$$R_i(t_i) = 1 - \frac{n_i\{-\ln[R_s(t)]\}}{c_i N} = 1 - \frac{n_i}{N}\frac{1}{c_i}\{-\ln[R_s(t)]\} \tag{10}$$

式中：$\lambda_i =$　為第i項元件的失效率配當值；

n_i　為第i項元件所含的模組數(或零件數)；

N　為系統各元件所含模組數的總和；

$R_s(t_i)$　為系統在操作時間t_i時之可靠度目標；

t_i　為第i項元件之指定操作時間；

c_i　為第i項元件之關鍵性因子，亦即Pr{系統發生失效｜第i項分項失效}。

[範例]　有一包含四個分系統的電機系統，工作上要求連續操作10小時之可靠度為0.95。其中第一及第三分系統為關鍵分項，如發生失效系統隨即停機；第二分系統在系統的全程操作中持續操作9小時，其關鍵性因子為0.95；第四分系統在系統的全程操作中持續操作8小時，其關鍵性因子為0.90。已知各分系統所含的模組數量分別為：第一分系統為30件；第二分系統為100件；第三分系統為50件；第四分系統為80件。試以AGREE方法計算各分系統之可靠度配當值。

[解答]

系統之模組總數量，N＝30＋100＋50＋80＝260,

故計算得各個元件的失效率分別為：

$$\lambda_1 = \frac{30[-\ln(0.95)]}{(260)(1.0)(10)} = 5.918\times10^{-4}$$

$$\lambda_2 = \frac{100[-\ln(0.95)]}{(260)(0.95)(9)} = 23.074\times10^{-4}$$

$$\lambda_3 = \frac{50[-\ln(0.95)]}{(260)(1.0)(10)} = 9.864\times10^{-4}$$

$$\lambda_4 = \frac{80[-\ln(0.95)]}{(260)(0.90)(8)} = 21.920\times10^{-4}$$

故得各個元件之可靠度配當值分別為：

$$R_1 = \exp\left(-5.918\times10^{-4}\times10\right) = 0.99410$$

$$R_2 = \exp\left(-23.074\times10^{-4}\times9\right) = 0.97945$$

$$R_3 = \exp\left(-9.864\times10^{-4}\times10\right) = 0.99018$$

$$R_4 = \exp\left(-21.920\times10^{-4}\times8\right) = 0.98262$$

[**範例**] **某機載電子設備的工作時間為** 12 **小時，可靠度目標為**$R_s = 0.923$**，這部設備的各分項元件的有關數據如下表所示，試對各分項元件進行平均失效間隔時間配當。**

項次	分項元件名稱	分項元件零件數	工作時間	重要度
1	發射機	102	12	1.0
2	接收機	91	12	1.0
3	自動啟動裝置	95	3	0.3
4	控制設備	242	12	1.0
5	電源	40	12	1.0
	共計	570		

[**解答**] **已知**$R_s = 0.923$**及上表資料。**

按照 Agree **可靠度配當法，可得：**

$$\theta_1 = \frac{-570\times1.0\times12}{102\times\ln(0.923)} = 837\ \text{hr}$$

$$\theta_2 = \frac{-570\times1.0\times12}{91\times\ln(0.923)} = 938\ \mathrm{hr}$$

$$\theta_3 = \frac{-570\times0.3\times3}{95\times\ln(0.923)} = 67\ \mathrm{hr}$$

$$\theta_4 = \frac{-570\times1.0\times12}{242\times\ln(0.923)} = 353\ \mathrm{hr}$$

$$\theta_5 = \frac{-570\times1.0\times12}{40\times\ln(0.923)} = 2134\ \mathrm{hr}$$

由此可知，各分項元件的可靠度配當值為：

$$R_1 = \exp(-12/837) = 0.9858$$

$$R_2 = \exp(-12/938) = 0.9678$$

$$R_3 = \exp(-3/67) = 0.9562$$

$$R_4 = \exp(-12/353) = 0.9666$$

$$R_5 = \exp(-12/2134) = 0.9944$$

驗算結果之系統可靠度：

$$R_s = 0.9858\times0.9678\times0.9562\times0.9666\times0.9944 = 0.9232 > 0.923$$

3.4 評點配當法

評點配當之作法是安排富有經驗的工程人員，就若干重要因素對欲作配當可靠度的元件可靠度的可能影響程度作問卷調查，並由受調查者予以評點(rating)。評點可靠度配當法考量因素包括：成本、任務需求、重要性、環境條件、複雜性、零件數量、及設計成熟度與技藝水準等，各個因子的偏好離差與可靠度配當的關係如表1所示。根據各元件每一種因素評點資料的合成結果得到各元件的權重因子，然後調整各元件應該配當之可靠度值之高低，使之達到合理分配的境地。

評點配當法之作法為利用問卷調查的方式，將問卷發給參與配當工作的各個工程專業人員，就可能影響可靠度配當的各項因子針對每一元件進行評點記分。然後就評點結果進行分析歸納，其分析方法如下：

假設系統可靠度目標為 R_s，系統有L個元件要進行配當，配當所考慮的因子有M個，總共有N位專家參與評點，若第k位評點人員對第i項項元件的第j項因子所作的評點為 X_{ijk}，則集合眾專家的評點結果可得到，第i項元件中第j項因子之平均評點數 Y_{ij} 為：

$$Y_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N} X_{ijk}}{N} \tag{11}$$

每一個元件之配當權重因子值 w_i，則有乘與加兩種處理模型，其權重因子的計算式子分別說明如下：

(1). **乘的模型**

$$w_i = \frac{\prod_{j=1}^{M} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{L} \prod_{j=1}^{M} Y_{ij}} \tag{12}$$

(2). **加的模型**

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{M} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{M} Y_{ij}} \tag{13}$$

故在獲得第i個元件之配當權重因子值 w_i，即可計算得到第i個元件之可靠度配當值分別為：

$$\begin{aligned} R_i &= (R_s)^{w_i} \\ &= 1 - w_i(1 - R_s) \end{aligned} \tag{14}$$

在失效時間為指數分佈的假設下，第 i 個分項的失效率配當公式為：

$$\lambda_i = w_i \times \lambda_s$$

其中 λ_s 為系統失效率。

3.5　配對比較配當法

配對比較配當法為評點配當法之一，此法係由Thurstone及Mosteller所共同發展的配當方法。此法主要是由經選定一定樣本數量的專家，針對某一項影響各元件可靠度配

當值的因素，主觀地進行成對的兩個元件的相對偏好的評點工作，然後利用數學技巧將這些樣本的主觀相對偏好評點先轉換成群體的客觀絕對偏好值，進而轉換成每一個元件之配當權重值。

此一配當法有下列三個假設條件：

(1). 每個專家對每一項因素之相對偏好評點均為相互獨立且其變異數相等。

(2). 每個專家所做之每一項偏好評點為常態分佈(normal distribution)。

(3). 每個專家以評點表示偏好程度，分為 0~3 四個等級，其中 0 代表偏好相同，1 代表偏好程度低，2 代表偏好程度次高，3 代表偏好程度最高。

評點採相對評點原則，以 $X(i,j)$ 表示偏好評點，若j元件較i元件偏好強，則偏好離差為正號，反之則偏好離差為負號。各項因素之影響效應與偏好離差之關係如表2。

表2：可靠度配當考量因素評點原則

因素	因素效應	可靠度水準	偏好離差
重要性	低	低	高
環境條件	差	低	高
複雜性	高	低	高
安全性	低	低	高
成本	高	低	高
維護性	易	低	高
工藝水準	低	低	高

3.5.1 符號說明

在敘述配對比較配當法的數學模型之前，首先說明在計算過程中所使用的一些數學符號的定義與含義如下：

p = 參與評點工作之專家人數；

k = 第 k 個專家；

n = 影響系統可靠度的因素數目；

L = 第 L 個影響因素；

m = 進行可靠度配當之分系統數目；

i = 第 i 分系統；

j = 第 j 分系統；

X_{Lijk} = 考慮因素 L 下，第 k 個專家就分系統 j 對分系統 i 之個體主觀相對偏好評點；

Y_{Lij} = 考慮因素 L 下，分系統 j 對分系統 i 之樣本主觀相對偏好離差；

P_{Lij} = 考慮因素 L 下，分系統 j 對分系統 i 之樣本主觀相對偏好機率；

Z_{Lij} = 考慮因素 L 下，分系統 j 對分系統 i 之群體主觀相對偏好離差；

T_{Li} = 考慮因素 L 下，分系統 i 之群體主觀絕對偏好離差；

Z'_{Lij} = 考慮因素 L 下，分系統 j 對分系統 i 之群體客觀相對偏好離差；

P'_{Lij} = 考慮因素 L 下，分系統 j 對分系統 i 之群體客觀相對偏好機率；

P'_{Lqr}= 在群體客觀相對偏好機率矩陣中的最小機率，對應的分系統為 q；

Y'_{Lr} =考慮因素 L 下，分系統 r 之群體客觀絕對偏好離差；

T'_{r} =考慮所有因素下，分系統 r 之群體客觀絕對偏好評點；

w_{r} =考慮所有因素下，分系統 r 之群體客觀權重值；

R_{s} = 全系統之可靠度目標；

R_{r} = 第 r 分系統之可靠度配當值。

3.5.2 配對評點執行過程與分析計算方法

(1). 配當問題敘述：

敘述所要進行配當的系統及準備工作項目，例如假設系統可靠度目標為 R_s，系統中要進行配當的分系統個數；配當所考慮的可能影響系統可靠度配當的因素個數，如成本、複雜性、安全性等等；選定參與評點工作的專家人數，這些專家應該包含各個專業領域，如系統工程、設計、品保、可靠度、後勤支援等。

(2). 每一個專家填寫個別主觀相對偏好評點問卷調查表：

針對問題製作出適當的專家評點問卷調查表，如表 3。每一個專家就其專業觀點，填寫表中各欄之相對偏好評點。

(3). 專家相對偏好評點問卷調查資料處理：

分別針對不同因素彙整調查結果，做出數張彙整表，如表 4。

(4). **計算樣本平均主觀相對偏好離差：**

假設欲配當可靠度的分系統個數為 m、**考量的影響因素個數為** n、**參與評點工作的專家人數為** p。**而評點完成後第** k **位評點人員針對因素** L，**就** i **分系統對** j **分系統之個別主觀相對偏好評點值為** X_{Lijk}。**則集合眾專家的評點結果求取平均值，可得到分系統** j **對分系統** i **之樣本主觀相對偏好離差，亦即：**

$$Y_{Lij} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} X_{Lijk} \tag{15}$$

根據上式即計算得在考慮因素L**下，所有分系統**j**對分系統**i**之樣本主觀相對偏好離差，彙整如表**5**所示。**

(5). **計算樣本主觀相對偏好機率：**

假設參與評點工作的各個專家所作的評點值是公正、獨立的，根據模擬抽樣理論，所得之偏好評點可假設為均勻分佈。根據評點原則，假設每一位專家有 8 **個可能的偏好評點值，由此可將樣本主觀相對偏好離差轉換為樣本主觀相對偏好機率** P_{Lij}，**亦即：**

$$P_{Lij} = \frac{Y_{Lij} + 4}{8} \tag{16}$$

此意味著：若 P_{Lij} **大於**0.5**，表示對分系統**j**偏好機率較高；若小於**0.5**則表示對分系統**i**偏好較高。**

根據上式即可計算得在考慮因素 L **下，所有分系統** j **對分系統** i **之樣本主觀相對偏好機率，彙整如表** 6 **所示。**

(6). **計算群體主觀相對偏好離差**

假設群體的偏好機率為標準常態分佈，並假設群體相對偏好機率等於樣本相對偏好機率，則可由下式計算得到對應之群體客觀相對偏好離差 Z_{Lij} **為：**

$$Z_{Lij} = \Phi^{-1}\left(P_{Lij}\right) \tag{17}$$

式中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ **表標準常態分佈** Φ **之反函數，而：**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi$$

經由上述的轉換，將所有對分系統 j **對分系統** i **之群體主觀相對偏好離差相加，即可得到分系統** i **之群體主觀絕對偏好離差** T_{Li} **為：**

$$T_{Li}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Z_{Lij} \tag{18}$$

由以上轉換與計算可得到在考慮因素 L 下，每一分系統 j 對分系統 I 之群體主觀相對偏好離差及每一分系統之群體客觀絕對偏好離差，彙整如表 7 所示。

(7). 計算群體客觀相對偏好離差：

將分系統群體客觀絕對偏好離差兩兩相減，即可計算得分系統 j 對分系統 i 之群體客觀相對偏好離差 Z'_{Lij} 為：

$$Z'_{Lij}=T_{Li}-T_{Lj}, 1\le i,j\le m, i\ne j \tag{19}$$

根據此式可計算得在考慮因素 L 下，每一分系統之群體客觀相對偏好離差，彙整如表 8 所示。

(8). 計算群體客觀相對偏好機率

根據常態分佈之假設可知，群體客觀相對偏好離差與群體客觀相對偏好機率 P'_{Lij} 之關係為：

$$P'_{Lij}=\Phi\left(Z'_{Lij}\right) \tag{20}$$

利用上式可計算在考慮因素 L 下，所有分系統 j 對分系統 i 之群體客觀相對偏好機率，彙整如表 9 所示。

(9). 確認群體客觀相對偏好機率最小之分系統：

上一個步驟所計算得之客觀相對偏好機率，可得到一個客觀相對偏好機率矩陣表。尋找矩陣表中之最小值 P'_{Lpq}，亦即：

$$P'_{Lpq}=\min_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le m}\left\{P'_{Lij}\right\} \tag{21}$$

若最小相對偏好機率所在之列為第 q 列，則由第 q 行可確認出在 m 個分系統中，第 q 個分系統的群體客觀相對偏好機率為最小的分系統，同時第 q 行的數值即代表著在考慮因素 L 下，每一分系統之群體客觀絕對偏好機率。

(10). 計算群體客觀絕對偏好離差及總偏好評點：

以群體客觀相對偏好機率最小的 q 分系統為基準，令其群體絕對偏好離差值為零，亦即 $T'_{Lq}=0$，其餘各分系統 r 之群體客觀絕對偏好評點 T'_{Lr} 可按下述規則決定之：

$$\begin{aligned}
&若 0.8125 \le P'_{Lqr} < 1.0000, \ 則 T'_{Lr} = 3, \\
&若 0.6875 \le P'_{Lqr} < 0.8125, \ 則 T'_{Lr} = 2, \\
&若 0.5625 \le P'_{Lqr} < 0.6875, \ 則 T'_{Lr} = 1, \\
&若 0.5000 \le P'_{Lqr} < 0.5625, \ 則 T'_{Lr} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

以上步驟乃是針對某一因素 L 所做之分析，重覆上述步驟將每一個考慮的因素都做過分析後，即可得到考慮每一因素下每一分系統之群體客觀絕對偏好離差值，根據此表可求出考量所有因素之後各分系統之總偏好評點S'_r，亦即將各分系統所有因素之群體客觀絕對偏好離差相加在一起：

$$S'_r = \sum_{L=1}^{n} T'_{Lr} \tag{23}$$

可得出各分系統之總偏好評點，將各分系統之因素群體客觀絕對偏好離差及總偏好評點彙整如表 10 所示。

(11).**計算各分系統權重因子：**

進而可按下述計算式求得各分系統之權重因子 w_r 為：

$$w_r = \frac{S'_r}{\sum_{r=1}^{m} S'_r} \tag{24}$$

(12).**計算各分系統之可靠度配當值：**

由各分系統之權重因子可計算得每一分系統之可靠度配當值R_r，亦即：

$$R_r = (R_s)^{w_r} \tag{25}$$

表3：配對比較可靠度配當法之問卷調查表

因素	配對相對評點					
	(A,B)	(A,C)	(A,D)	(B,C)	(B,D)	(C,D)
成本	$X_{1,A,B,k}$	$X_{1,A,C,k}$	$X_{1,A,D,k}$	$X_{1,B,C,k}$	$X_{1,B,D,k}$	$X_{1,C,D,k}$
維修性	$X_{2,A,B,k}$					
安全性	$X_{3,A,B,k}$					
重要性	$X_{4,A,B,k}$					
複雜性	$X_{5,A,B,k}$					
環境	$X_{6,A,B,k}$					
技藝水準	$X_{7,A,B,k}$					

註：1. A、B、C、D為各分系統之代號，本例中共有四個分系統，亦即m＝4；
2. 下標k代表第k個受訪專家。

表4：問卷調查結果某一因素個體相對偏好評點(X_{Lijk})彙整表

j / i	A分系統	B分系統					C分系統					D分系統				
A分系統		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
B分系統							X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
C分系統												X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
D分系統																

註：1. 本表假設共有四個分系統，亦即m=4，其中A、B、C、D為各分系統之代號；
2. 本表假設總共有5位受訪專家。

表5：某一因素之樣本主觀相對偏好離差(Y_{Lij})彙整表

j / i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	Y_{LAA}=0.00	Y_{LAB}	Y_{LAC}	Y_{LAD}
B分系統	$Y_{LBA}=-Y_{LAB}$	Y_{LBB}=0.00	Y_{LBC}	Y_{LBD}
C分系統	$Y_{LCA}=-Y_{LAC}$	$Y_{LCB}=-Y_{LBC}$	Y_{LCC}=0.00	Y_{LCD}
D分系統	$Y_{LDA}=-Y_{LAD}$	$Y_{LDB}=-Y_{LBD}$	$Y_{LDC}=-Y_{LCD}$	Y_{LDD}=0.00

表6：某一因素之樣本主觀相對偏好機率(P_{Lij})彙整表

j / i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	P_{LAA}=0.50	P_{LAB}	P_{LAC}	P_{LAD}
B分系統	$P_{LBA}=1-P_{LAB}$	P_{LBB}=0.50	P_{LBC}	P_{LBD}
C分系統	$P_{LCA}=1-P_{LAC}$	$P_{LCB}=1-P_{LBC}$	P_{LCC}=0.50	P_{LCD}
D分系統	$P_{LDA}=1-P_{LAD}$	$P_{LDB}=1-P_{LBD}$	$P_{LDC}=1-P_{LCD}$	P_{LDD}=0.50

表7：某一因素之群體主觀相對偏好離差(Z_{Lij})及群體主觀絕對偏好離差(T_{Li})彙整表

j i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統	合計
A分系統	Z_{LAA}	Z_{LAB}	Z_{LAC}	Z_{LAD}	T_{LA}
B分系統	Z_{LBA}	Z_{LBB}	Z_{LBC}	Z_{LBD}	T_{LB}
C分系統	Z_{LCA}	Z_{LCB}	Z_{LCC}	Z_{LCD}	T_{LC}
D分系統	Z_{LDA}	Z_{LDB}	Z_{LDC}	Z_{LDD}	T_{LD}

表8：某一因素之群體客觀相對偏好離差(Z'_{Lij})彙整表

j i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	Z'_{LAA}	Z'_{LAB}	Z'_{LAC}	Z'_{LAD}
B分系統	Z'_{LBA}	Z'_{LBB}	Z'_{LBC}	Z'_{LBD}
C分系統	Z'_{LCA}	Z'_{LCB}	Z''_{LCC}	Z'_{LCD}
D分系統	Z'_{LDA}	Z'_{LDB}	Z'_{LDC}	Z'_{LDD}

表9：某一因素之群體客觀相對偏好機率(P'_{Lij})彙整表

j i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	P'_{LAA}	P'_{LAB}	P'_{LAC}	P'_{LAD}
B分系統	P'_{LBA}	P'_{LBB}	P'_{LBC}	P'_{LBD}
C分系統	P'_{LCA}	P'_{LCB}	P'_{LCC}	P'_{LCD}
D分系統	P'_{LDA}	P'_{LDB}	P'_{LDC}	P'_{LDD}

表10：所有因素之群體客觀絕對偏好離差及各分系統之總絕對偏好評點彙整表

因素	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
成本	$T'_{\text{成本}A}$	$T'_{\text{成本}B}$	$T'_{\text{成本}C}$	$T'_{\text{成本}D}$
維修性	$T'_{\text{維修性}A}$	$T'_{\text{維修性}B}$	$T'_{\text{維修性}C}$	$T'_{\text{維修性}D}$
安全性	$T'_{\text{安全性}A}$	$T'_{\text{安全性}B}$	$T'_{\text{安全性}C}$	$T'_{\text{安全性}D}$
重要性	$T'_{\text{重要性}A}$	$T'_{\text{重要性}B}$	$T'_{\text{重要性}C}$	$T'_{\text{重要性}D}$
複雜性	$T'_{\text{複雜性}A}$	$T'_{\text{複雜性}B}$	$T'_{\text{複雜性}C}$	$T'_{\text{複雜性}D}$
環境	$T'_{\text{環境}A}$	$T'_{\text{環境}B}$	$T'_{\text{環境}C}$	$T'_{\text{環境}D}$
技藝水準	$T'_{\text{技藝水準}A}$	$T'_{\text{技藝水準}B}$	$T'_{\text{技藝水準}C}$	$T'_{\text{技藝水準}D}$
累計	S'_A	S'_B	S'_C	S'_D
總計 $=SS=S'_A+S'_B+S'_C+S'_D$				
權重因子	$w_A=S'_A/SS$	$w_B=S'_B/SS$	$w_C=S'_C/SS$	$w_D=S'_D/SS$

3.5.3 實例說明

假設有一個系統由四個分系統所組成，其可靠度目標訂為0.90，利用配對比較配當法進行各分系統的可靠度配當工作，考慮影響各分系統可靠度配當的因素計有成本、安全性、環境及複雜性等五項，由五位專家進行配對評點工作，其中就成本因素的個體主觀相對偏好評點值如表4a，群體客觀相對偏好機率值之計算過程如表5a~9a，各分系統考慮所有因素之群體客觀絕對偏好離差及各分系統之總偏好評點計算如表10a。由此計算得各分系統之權重因子分別為：

$$w_A = \frac{5}{22} = 0.2272$$

$$w_B = \frac{7}{22} = 0.3182$$

$$w_C = \frac{8}{22} = 0.3636$$

$$w_D = \frac{2}{22} = 0.0909$$

由此可計算得各分系統之可靠度配當值分別為：

$$R_A = (0.90)^{5/22} = 0.90^{0.2272} = 0.9763$$

$$R_B = 0.90^{7/22} = 0.90^{0.3182} = 0.9670$$

$$R_C = 0.90^{8/22} = 0.90^{0.3636} = 0.9624$$

$$R_D = 0.90^{2/22} = 0.90^{0.0909} = 0.9905$$

表4a：問卷調查結果某一因素個體相對偏好評點(X_{Lijk})彙整表

j i	A分系統	B分系統					C分系統					D分系統				
A分系統		2	1	2	2	2	2	2	3	3	3	-2	-1	-3	-1	-1
B分系統							2	2	3	2	3	-2	-2	-3	-3	-3
C分系統												-2	-2	-3	-3	-3
D分系統																

註：1.本表假設共有四個分系統，亦即m=4，其中A、B、C、D為各分系統之代號；
2.本表假設總共有5位受訪專家。

表5a：某一因素之樣本主觀相對偏好離差(Y_{Lij})彙整表

j i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	0.0	1.8	2.6	-1.6
B分系統	-1.8	0.0	2.4	-2.6
C分系統	-2.6	-2.4	0.0	-2.6
D分系統	1.6	2.6	2.6	0.0

表6a：某一因素之樣本主觀相對偏好機率(P_{Lij})彙整表

j i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	0.500	0.725	0.825	0.300
B分系統	0.275	0.500	0.800	0.175
C分系統	0.175	0.200	0.500	0.175
D分系統	0.700	0.825	0.825	0.500

表7a：某一因素之群體主觀相對偏好離差(Z_{Lij})及群體主觀絕對偏好離差(Z_{Li})彙整表

j i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統	合計
A分系統	0.0000	0.5978	0.9346	0.5244	0.2520
B分系統	-0.5978	0.0000	0.8416	-0.9346	-0.1727
C分系統	-0.9346	-0.8416	0.0000	-0.9346	-0.6777
D分系統	0.5244	0.9346	0.9346	0.0000	0.5984

表8a：某一因素之群體客觀相對偏好離差(Z'_{Lij})彙整表

j / i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	0.0000	0.4247	0.9297	-0.3464
B分系統	-0.4247	0.0000	0.5050	-0.7711
C分系統	-0.9297	-0.5050	0.0000	-1.2761
D分系統	0.3464	0.7711	1.2761	0.0000

表9a：某一因素之群體客觀相對偏好機率(P'_{Lij})彙整表

j / i	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
A分系統	0.5000	0.6645	0.8237	0.3645
B分系統	0.3355	0.5000	0.6932	0.2203
C分系統	0.1763	0.3068	0.5000	$\boxed{0.1010}$
D分系統	0.6355	0.7797	0.8990	0.5000

表10a：所有因素之群體客觀絕對偏好評點及各分系統之群體總偏好評點彙整表

因素	A分系統	B分系統	C分系統	D分系統
成本	1	2	3	0
安全性	1	2	3	0
環境	2	1	0	2
複雜性	1	2	2	0
累計	5	7	8	2
總計=22				
權重因子	0.2273	0.3182	0.3636	0.0909

4 有約束條件可靠度配當法

第 3 節所討論的可靠度配當法都是以所設計的系統能滿足規定的可靠度指標為目標的，除了可靠度指標之外，沒有考慮其他約束條件，這樣當然可以使問題處理簡單化，但是往往與實際情況有較大的差異。

事實上，在設計一個系統時，是有許多約束條件的，例如在成本、重量、體積、消耗功率等的限制條件(即約束條件)下，使所設計的系統的可靠度最大，或者把可靠度維持在某一指標值以上作為限制條件，而使系統的其他參數做到最適化。

在已知的約束條件下配當可靠度指標的必要條件是，利用一些數據或公式建立約束變數與可靠度指標之間的關係，也就是說，對於可靠度需求不同或設計方案不同的系統，其成本、重量等因素都必須是可以計算的。

有約束條件的系統可靠度配當方法有許多種，以下介紹拉格朗吉乘數法、動態規劃法、與直接尋查法等三種較常使用的方法。

4.1 拉格朗吉乘數法

一般說來，要求一個無約束的連續函數的極值時，只要對該函數求導數，並使其等於零即可，也就是已知函數$f(x)$時，用$f'(x)=0$，即可求出其極值點。

當所面臨的問題是在單一約束條件時，其極值顯然與無約束條件下的極值不同，這類的問題可以用拉格朗吉乘數法來解決。

如圖 2 所示的系統，假設此系統係由 n 個分系統串聯組成，每個分系統可以有不同的複聯數。

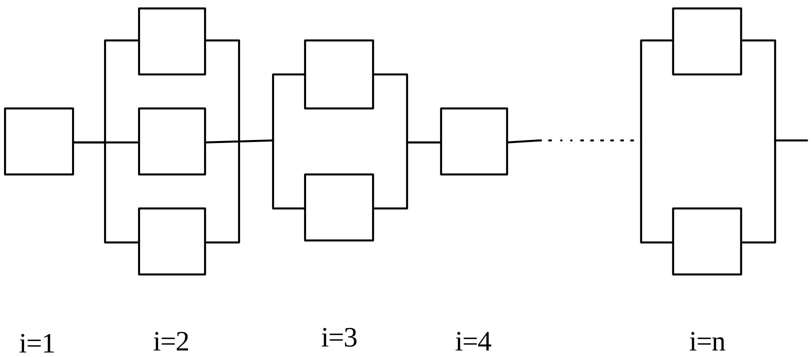

圖 2：系統可靠度方塊圖

對於這樣的系統，求單一約束條件下的極值問題，可以有兩種解法：

(1). 在成本(或別的參數)的約束條件下，使可靠度最大，其數學表達式為：

$$\max_{k_i \in k} \prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right) \tag{26}$$

式中 $k=\left\{k_i \middle| k_i \text{為正整數}; i=1,2,\cdots,n, \text{且} \sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i \le \varpi^*\right\}$。

(2). 把可靠度維持在某個規定指標之上，使其成本(或別的參數)最低，其數學表達式為：

$$\min_{k_i \in k} \sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i \tag{27}$$

其中 $k=\left\{k_i \middle| k_i \text{為正整數}; i=1,2,\cdots,n; \text{且} \prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right) \ge R_s^*\right\}$

上二式中的其他符號為：

F_i 第 i 個分系統中個別設備的不可靠度；

k_i 組成第 i 個分系統的設備總數(即複聯數+1)；

ϖ^* 規定的系統成本(或其他參數)；

ϖ_i 第 i 個分系統個別設備的成本(或其他參數)；

n 分系統數；

R_s^* 規定的系統可靠度指標。

以下針對第(1)種情況進行推導工作，在單一約束條件下，可將 k_i 為正整數的條件取消，設 k_i 為正實數，從而將(26)式中的不等式約束條件變換成等式約束條件(注意：在多種約束條件下則無法改成等式)。如此，式(26)可改寫為：

$$\max_{k_i \in k} \prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right) \tag{28}$$

式中 $k=\left\{k_i \middle| k_i \ge 1 \text{的實數}; i=1,2,\cdots,n; \text{且} \sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i = \varpi^*\right\}$

拉格朗吉乘數法的要點是構造一個新的函數，使它既包含了目標函數又包含了約束函數，如此，求有約束條件的極值問題就變換成求無約束條件的新函數的極值問題。新函數(即拉格朗吉函數) $L(k_i,\lambda)$ 為：

$$L(k_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right)+\lambda\left(\varpi^*-\sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i\right) \tag{29}$$

式中 λ 為拉格朗吉乘數。

由於 $\ln x$ 與 x 有相同的極值點，並且此處 $1-F_i^{k_i}>0$，所以 $\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right)$ 與 $\ln\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right)\right]$，亦即 $\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-F_i^{k_i}\right)$ 具有相同的級值點。在只著眼於最適化求解時，為了計算方便，可用 $\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-F_i^{k_i}\right)$ 代替 $\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_i^{k_i}\right)$，如此式(28)可改寫為

$$\max_{k_i\in k}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-F_i^{k_i}\right) \tag{30}$$

式中 $k=\left\{k_i \,\middle|\, k_i\geq 1\text{的實數}; i=1,2,\cdots,n;\text{且}\sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i=\varpi^*\right\}$。

拉格朗吉函數為

$$L(k_i,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-F_i^{k_i}\right)+\lambda\left(\varpi^*-\sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i\right) \tag{31}$$

只要求出 $L(k_i,\lambda)$ 的極值，即可求出滿足約束條件的最適複聯數 (k_i-1)，亦即 $L(k_i,\lambda)$ 分別對 k_i、λ 的導數：

$$\frac{\partial L(k_i,\lambda)}{\partial k_i}=0$$

$$\frac{\partial L(k_i,\lambda)}{\partial \lambda}=0$$

用上列兩式求 k_i、λ 兩個未知數，亦即：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

$$\varpi^*-\sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i = \varpi^* \tag{32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_i} = 0$$

$$\frac{-F_i^{k_i} \times \ln F_i}{1 - F_i^{k_i}} - \lambda\varpi_i = 0$$

$$k_i = \frac{\ln\left(\dfrac{\lambda\varpi_i}{\lambda\varpi_i - \ln F_i}\right)}{\ln F_i} \tag{33}$$

代入式(32)**中,**

$$\sum_{i=1}^{n}\varpi_i k_i = \sum_{i=1}^{n}\varpi_i \frac{\ln\left(\dfrac{\lambda\varpi_i}{\lambda\varpi_i - \ln F_i}\right)}{\ln F_i} = \varpi^* \tag{34}$$

即：

$$\prod\left(\frac{\lambda\varpi_i}{\lambda\varpi_i - \ln F_i}\right)^{\frac{\varpi_i}{\ln F_i}} = e^{\varpi^*} \tag{35}$$

當給出特定條件：

$$\ln\left(\frac{F_i}{\varpi_i}\right) = c(\text{常數}) \tag{36}$$

即給定各分系統中每台設備的不可靠度F_i **的對數與其成本**(**或其他參數**)ϖ_i **成一固定比例時，將式**(36)**代入式**(35)**可得：**

$$\prod\left(\frac{\lambda\varpi_i}{\lambda\varpi_i - c\varpi_i}\right)^{1/c} = e^{\varpi^*}$$

代

參考文獻

1. MIL-HDBK-338-1, Electronic Reliability Design Handbook