可靠度技術手冊

機率設計與分析技術

彭鴻霖　編著

中華民國八十九年十二月十八日

機率設計與分析技術

目 錄

機率設計與分析技術

1 前言

物品的設計與製造是為了滿足人類的某種需要而進行的一項工作，設計是一個做出決策的過程，其基本目的是獲得一種能滿意地執行它的任務的工作系統。目前，在進行物品設計時，有兩種方法可供選擇：(1).傳統設計法，假設各設計變數都是確定值，依照規定的安全係數進行設計工作；(2).機率設計法，假設設計變數為隨機變數，依據可靠度或失效機率性質進行設計，因而稱之為機率設計。隨著科技的發展，現在的系統與裝備設計，已逐漸從傳統設計法改為應用機率設計法，最後機率設計法勢必取代傳統設計法，本節概要討論機率設計法的原理與方法。

2 可靠度模型與分析方法

可靠度模型為說明物品可靠度績效的數學模型，是所有可靠度設計與量測工作的基礎；可靠度分析工作主要是定量地分析計算物品的可靠度，一般進行可靠度分析的時機有兩種狀況：設計中物品與既有的物品。這兩種物品事實上存在著很大的差異，不過無論是物品本身的特性或是外在的影響條件，都存在著不確定性。隨著各種可靠度技術的迅速發展，可靠度專業人員研究出了許多可以分析計算物品可靠度的數學模型、方法與程序。這些可靠度分析技術可歸納為兩類：統計分析法與物理分析法。

統計分析法是從物品執行任務表現結果的成功或失效關點來討論可靠度，利用統計分析法計算物品可靠度時，假設可靠度的變化服從某些由實驗數據所確定的統計規律。統計分析法依其所應用的理論分成兩個方向發展：第一種方向是把可靠度當作時間領域的變數，即可靠度會隨時間按某種確定的規律變化。使用這種方法的研究對象如失效時間、疲勞壽命等，主要是以物品的耗損行為決定了其使用壽命，這種方法所得到的結果與實驗結果非常接近。另外一種方向是把可靠度視為偶然因素造成的結果，失效是因為出現了不希望發生的偶然因素所引起的，因而將可靠度當作一種隨機事件發生的機會來計算，大多應用於單次使用物品，在這種情況，實際上不可能使用可靠度的時間特性。統計分析法的缺點是，它沒有描述失效產生的原因，並且也沒有指出消除失效的可能性，這種方法目前在電子系統和機電系統應用較為廣泛。

相對於統計分析法，物理分析法是從物品成功或失效的過程來討論可靠度問題，同樣也有兩種方向，其一是應力強度干涉模型，這種方法最初在發展時，認為物品的負載需要與供應能力均為隨機變數，且服從一定的機率分佈，物品的可靠度是供應能力大於負載需要的機率。在這種情形下，計算可靠度所用的初始數據也是由統計得到的，但不是物品可靠度本身的特徵量，而是物品的供應能力、材料規格與幾何參數，以及作用於物品的外在負載或需求等的統計資料。這種方法考慮及導致物品失效的原因，且後來經過許多學者的不斷努力，逐漸發展出完善的動態模型，變成計算物品可靠度的基本模型，特別是在機械與結構可靠度領域中廣為應用。其二是隨機系統模型，將物品的供應能力當成一種會隨時間或空間而變化的系統，亦即是一種隨機過程(random process)或隨機場(random field)，可靠度定義為隨機過程或隨機場超出規定任務需求水準的機率，失效定義規定任務需求的界限，此一界限將系統分割為成功領域與失效領域，計算可靠度

時，同樣需要一些初始統計資料，從而導出隨機過程或隨機場的參數，不過計算這些參數所需的數學理論比應力強度干涉法複雜且困難許多。

2.1 可靠度設計方法分類

2.1.1 常數設計法

對於電子系統及一些以選用標準零件的設計工作，由於零件標準化制度的推廣與應用，長久以來已累積了相當多的經驗資料，將供給能力擇適簡化，利用少數設計特性來表示物品的特徵量，可靠度績效是其中之一。對標準化的零件而言，每一種設計特性的供給能力是固定的，稱為額定值(rated value)。在選用零件時，最重要的工作就是先確定最小的供給能力，作為選擇零件的基礎，此一選定的最小供給能力稱為減額定值(derated value)。無論是以安全係數或是安全裕度為設計考量，這種設計邏輯並沒有考量供給能力與需要負載均有可能是變動的，完全根據經驗建立設計的準則與分析方法，亦即，只要選定適切的安全係數或安全裕度，即可獲得可靠或安全的物品。由於這種設計方法以係數表示物品的能力為主，因此又將這種設計方法稱為傳統安全係數設計技術(safety factor design technique)。

2.1.2 參數設計法

由於長久以來，人們不斷的探討與評估各種物品的可靠度及其參數，逐漸地建立一些標準化零組件的可靠度與失效資料庫，並且以失效率為其代表性可靠度參數，例如電子元件可由美軍手冊 MIL-HDBK-217 獲得各式各樣常用電子零件失效率資料。

2.1.3 機率設計法

近年來，可靠度及設計工程人員均非常注意設計的各方面問題是否都已考量週詳，導致機率可靠度設計方法普遍受到重視。機率設計技術起源於太空計畫，目前已普及於工業產品與一般民用消費性產品。

2.1.4 實驗設計法

有些設計問題，由於本身許多參數與條件並不清楚，自然無法根據輸入條件數據配合既有的模型進行細部設計工作。首先必須先瞭解問題的模型以及構成模型所需的各項特性參數資料，在無具體學理可遵循前題下，只有採取試誤法尋求適切的數學模型，然後在求解。一般而言，實驗設計是大多數工程人員的選擇，實驗設計方法分為傳統實驗設計與直交表實驗設計兩類，後者即為大家所熟知的田口法。

2.2 機率設計過程

一個物品的設計，首先是確定環境條件，然後考量環境對應力與強度兩方面的影響。

(1). 列出設計問題；

(2). 確定設計有關的變數與參數；

(3). 進行失效模式效應與關鍵性分析；

(4). 驗證所選定的關鍵設計參數；

(5). 確定關鍵參數與失效準則間的關係；

(6). 確定影響失效的應力特性函數；

(7). 決定影響失效應力特性的機率分佈；

(8). 決定影響失效的強度特性函數；

(9). 決定影響失效強度特性的機率分佈；

(10).計算失效或成功機率。

3 減額定與安全係數

3.1 電子元件減額設計

所謂減額定就是指使零件在低於其額定應力的條件下工作，在實務上，實現減額定的方法不是降低應力，就是提高零件的強度。通常，最實用的方法是選用強度更高的零件。

減額定是降低零件失效率的有效方法，因為在所施加的應力值低於額定值時，大多數零件的失效率都有下降的趨勢。而當零件經受更高的應力時，其失效率就會上升，大多數零件的失效模式取決於應力。

電子零件經受過高的熱應力(溫度過高)就會過早的失效，MIL-HDBK-217 的失效率數據說明失效率明顯地隨著溫度變化而變化。某些零件比其他的零件對溫度更敏感，在這種情況下，通過適當的熱設計來降低熱應力(溫度)，就能使失效率降低。

電子零件與材料(參考 MIL-STD-454 之需求 18)的減額必需保證規定的設備可靠度符合規範需求，減額定方法因零件類型及其用途不同而有所差別。電阻器是通過降低工作功率與額定功率的比值來達到的，電容器的減額定方法是把所施加的電壓值保持在低於額定值的數值上，半導體零件的減額定是把功率耗散值保持在低於額定值時的水準來達到的。

電子零件的減額定必須採用減額定曲線，這些曲線通常是把減額定值與某些關鍵的環境因子或物理因子或數學模型結合在一起，數學模型根據應力比、溫度以及與所考慮的零件有關的其他參數，定量地確定基本失效率。

半導體零件的製造商大多會提供一些有用的數據，特別是與熱有關的，其中包括工作參數與溫度、最高與最低儲存溫度、最大接面溫度(junction temperature)的關係曲線，以及相關的熱阻值。除非專案計畫規定必須選用優選零件，否則與標稱觀測值之間的差異值就會很大。最大接面溫度必須由電路設計工程師以失效率相對於溫度的關係為基礎來進行減額定，以便能夠達到規定的可靠度。一個共同的設計錯誤就是，在計算最壞狀況下半導體的接面溫度後，如果不超過製造廠商提供的最大工作接面溫度，就假設熱設計是恰當的。當零件要在這些條件下有效地工作時，它的可靠度或壽命一般會低到無法接受的地步，除非把它與所要求的系統可靠度關聯起來，否則只討論半導體的接面溫度是無意義的，這通常是要求在應用時根據製造廠商額定值數據，大幅度地減低工作應力。

除了為滿足系統可靠度需求之外，同時從為分析誤差保留一些裕度的觀點而言，對最大接面溫度進行減額定也是可以接受的，這種減額定允許出現非均勻生熱，但不會發生致命性失效，並且允許系統的電性參數存在著瞬間變化。

MIL-HDBK-217 提供了圖表說明 NPN 矽質電晶體的基本失效率與溫度和工作應力之間的關係，其中工作應力以應力比 S 表示，應力比的定義為工作電應力與額定電應力的比值。根據這些圖表可知，失效率隨著電應力與溫度的增加而迅速上升。此外，當 NPN 電晶體在應力比為 10%時，由於溫度降低(由 160 ^{o}C 降低到 40 ^{o}C 的應力值)，失效率可能降低 5 - 6 倍。

由於電晶體和大多數電子零件一樣對溫度敏感，因而任何設計的熱分析，必須精確地提供適合這些零件應用時的所要求的環境溫度。當然，溫度越低可靠度越高，但是降低溫度又會引發其他的問題，主要是反映在增加環境方面控制系統的負擔。熱分析應該視為設計過程的一部分，並應包含在設備性能、可靠度、重量、體積、環境控制需求與成本的權衡研究之中。

作為一般規律，減額定不應保守到成本過份提高，減額定標準也不能太鬆，以致選用可靠的零件也無濟於事。最佳的減額定值應該處於或低於應力與溫度曲線的臨界點，所謂臨界點的定義為應力與溫度曲線圖中，由該點開始只要溫度或應力略有提高，失效率就會急劇上升。然而在實務上，另外也存在著最小減額定值，在某個最小應力水準時，為了提高電路性能可能需要提高它的複雜度，如此就抵消了通過減額定方法所獲得的可靠度增加值。

MIL-HDBK-338-2 提供了有關電氣與電子零件減額定的最新最全面的資訊。對電子零件而言，許多零件具有可以利用的、相為於應力的失效率數據。這些數據可以用來確定通過減額定可以獲得的可靠度增加，但上述情況並不適用於機械零件與結構零件，下一節將介紹有關此類零件的情況。

3.2 機械結構安全係數設計

機械結構件的可靠度設計觀念類似電子元件的減額定設計，但是機械結構設計的標準化層級比電子類低一級，也就是在材料層級。設計者是從標準化的材料中選擇適當者，然後決定尺寸、形狀，

在邏輯與應用上卻有所不同，它的基本含義是：設計的結構件所能承受的負載(或應力)要大於結構件

有關機械與結構零件的失效率與應力相對關係的數據，可以由製造廠商或用戶處獲得，但時間變化率的數據則可能無法獲得。在使用製造廠商的減額定應力值和個別設計應力值時，設計工程師必須記著，這些數據確實是一些分佈值，而不是一些確定值。因此，設計時不是利用應力與強度兩者最惡劣的「容差」，就是利用分佈曲線。當這些分佈隨著時間變化(如退化、磨損)時，必須把應力與強度的分佈與在預定的環境中的工作次數或工作時間關聯起來。

進行機械與結構設計的典型方法是使每一個零件都具有足夠的強度，以應付它將承受的最惡劣應力。目前可以找到的例如 MIL-HDBK-5「航空太空飛行器結構用金屬材料與零件」之類的一些參考資料，就可以找到有關的材料強度數據。其中有些資料還提供有限的由於疲勞而使強度隨時間退化的數據。有效的設計方法應該是從可靠度的角度評價設備的結構構造條件，因為失效並不一定是與時間有關的，所以設計工程師需要一些將應力與強度進行比對的技術以及定量確定設計可靠度的方法，傳統上慣用安全係數與安全裕度來達到設計可靠度值的完整性，這種方法並不恰當。

在設計中應力強度的概念認為，

進行應力強度分析的目的是為了提高設計可靠度，也就是為了找出應力與強度的最佳組合，這種最佳組合會得到可以接受的成功機率，並且在諸如重量、成本與材料可用性等其他約束條件方面有提供有利的競爭優勢。

設計工程師可以利用下列四種基本方法來提高可靠度：

(1). 提高平均強度：

(2). 降低平均應力：

(3). 減小應力變化：

(4). 減小強度變化：

4 設計變數與參數分析

一件工程設計的可靠度，常是若干設計變數及參數的函數，其中大多數的變數與參數均為隨機變數，而設計品的績效即以這些隨機變數的數學函數來表示。

系統與裝備完整的績效必先獲得其操作的充分資料才能得到，

4.1 負載需要之機率特性

應力的機率分佈一般不容易獲得，大多需要經過實際量測與分析才能經過統計分析建立此一資料。例如，火箭推進機的推力與往復式引擎的氣缸壓力大多為常態分佈。

4.2 供給能力之機率特性

討論供給能力或強度的論文與著作相當多，在傳統的設計過程中，大多將強度視為常數，然而，零件或結構本身的固有強度是受許多隨機性因素影響的，例如：零件材料強度不一、金相組成不均勻、表面粗糙度具有離散性、加工尺寸具有誤差等，因此，強度是一個隨機變數。有關強度的聚中與離散特性，可以應用機率理論來描述。

供給能力變數的機率分佈有兩種分析方法：最弱法及平均法。一般實務應用，鋼材的最大抗拉強度、降服強度、耐久性多假設為常態分佈，承受反覆力的機件，在一定壽命時，其疲勞強度亦有近似常態分佈。結構用合金材料之強度特性趨向於對數常態分佈。

5 機率設計原理

可靠度為一個物品所受的負載需要超過其供給能力而發生失效的機率，為求計算可靠度必須知道負載需要及供給能力兩種隨機變數的性質。此種分析法本來是在結構可靠度領域所發展完成的，負載需要為結構所承受的應力，而供給能力為結構的強度，因此稱之為應力強度干涉(stress-strength interference, SSI)可靠度分析法。

根據定義，物品的可靠度 R 為其供給能力超過負載需要的機率，亦即：

$$R = \Pr(C > L) = \Pr(C - L > 0)$$

假設供給能力 C 為隨機變數，其機率密度函數為 $f_C(c)$、累積分佈函數為 $F_C(c)$；負載需要 L 為隨機變數，其機率密度函數為 $f_L(l)$、累積分佈函數為 $F_L(l)$；且供給能力與負載需要為互相獨立的連續隨機變數，則可靠度可以寫成：

$$R = \Pr(C - L > 0) = \iint_D f_C(c)\, f_L(l)\, dc\, dl$$

此積分一般並不簡單，通常由失效的觀點可以獲得同樣的結論。所謂失效乃是指供給無法滿足應要時，也就是供給機率密度函數與需要機率密度函數重疊的部分，如圖 1 所示，而重疊的面積即代表失效機率，可靠度與失效機率為互補數，亦即 $R = 1 - P_f$。因此，只要求得失效機率，即可計算得到可靠度。

可靠度積分式的積分範圍(D)為，所有負載需要中小於供給能力的部分，如圖 2 所示。由積分範圍的幾何特性，可靠度可以寫成：

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{l}^{\infty} f_L(l)\, f_C(c)\, dc\right)dl \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_L(l)\left[1 - F_C(l)\right] dl \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_L(l)\, F_C(l)\, dl \end{aligned}$$

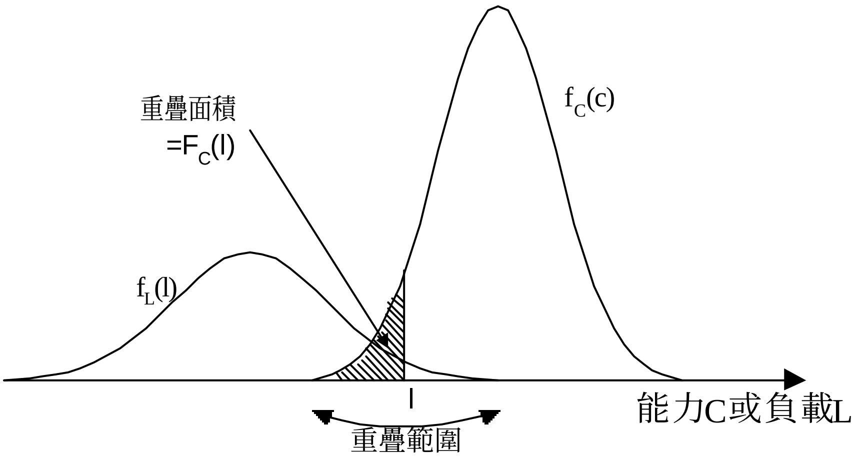

圖 1：供給能力與負載需要之機率密度函數

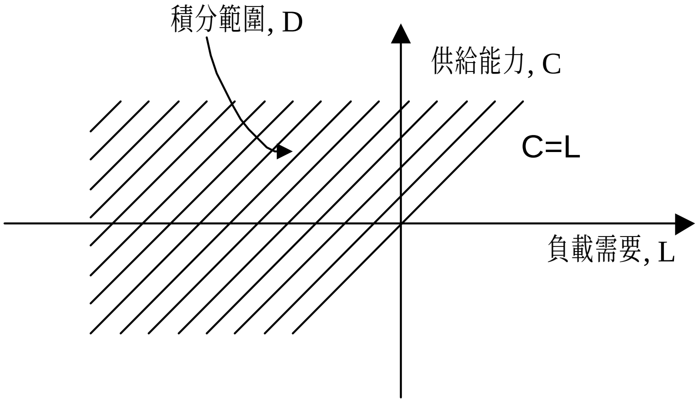

圖 2：可靠度積分範圍

不可靠度或失效機率為：

$$
\begin{aligned}
P_f &= 1 - R \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{l} f_L(l) f_C(c)\,dc\right] dl \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_L(l) F_C(l)\,dl
\end{aligned}
$$

上面的公式是假設供給能力與負載需要互為獨立的情形下所得到的，在一般實際工程應用上，這種假設是合理的。但是在有些場合，例如考慮物品本身的重量或是由於重量引起的自重應力，就不能把負載需要與供給能力視為獨立的隨機變數，必須考慮它們的相關問題。

假設負載需要與供給能力的聯合機率密度函數已知為 $f_{CL}(c,l)$**，則一般性的可靠度數學模型為：**

$$
R = \Pr(C > L) = \iint_{C>L} f_{CL}(c,l)\,dc\,dl
$$

而失效機率為：

$$P_f = \Pr(C \le L) = \iint_{C \le L} f_{CL}(c,l)\,dc\,dl$$

無論是可靠度或是失效機率，只要供給能力和負載需要的機率分佈為已知，例如常態、對數常態、伽瑪、指數、韋伯、極值(I 型、II 型、III 型)、瑞雷、均勻等，即可經過積分計算得到可靠度值。有些機率分佈可以經過解析過程直接獲得正解，有的則是積分部分太複雜或是計算過程太繁瑣，只能用近似或數值分析法才能求得其解。

5.1 正解法

當供給能力及負載需要的機率密度函數為已知且為常用的分佈時，通常可以獲得解析解，例如績效函數以供給能力與負載需要的差值表示，且供給能力與負載需要均為常態分佈；或是績效函數以供給能力與負載需要的比值表示，且供給能力與負載需要均為對數常態分佈或是均為伽瑪分佈。

5.1.1 負載需要與供給能力均為常態分佈

當負載需要 X 為常態分佈，亦即 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X{}^2)$**，其機率密度函數為：**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right], -\infty < x < \infty$$

而供給能力 Y 為常態分佈，亦即 $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y{}^2)$**，其機率密度函數為：**

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], -\infty < y < \infty$$

以上兩式中 μ_X =**負載需要之平均值；**
σ_X =**負載需要之標準差；**
μ_Y =**供給能力之平均值；**
σ_Y =**供給能力之標準差。**

假定 U=Y-X，則 U 亦為常態分佈，其平均值和標準差分別為：

$$\mu_U = \mu_Y - \mu_X$$

$$\sigma_U = \sqrt{\sigma_Y{}^2 + \sigma_X{}^2}$$

以 U 表示的可靠度為：

$$R=\Pr(U>0)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma_U\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_U}{\sigma_U}\right)^2\right)du$$

令$z=\frac{u-\mu_U}{\sigma_U}=\frac{u-(\mu_Y-\mu_X)}{\sqrt{\sigma_Y{}^2+\sigma_X{}^2}}$，則可靠度方程式可簡化為：

$$R=\int_{-\frac{\mu_U}{\sigma_U}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz=1-\Phi\left(-\frac{\mu_U}{\sigma_U}\right)$$

式中$\Phi(\cdot)$為常態分佈之累積分佈函數。將供給能力及負載需要之機率參數帶回可靠度關係式中，得到：

$$R=1-\Phi\left(-\frac{\mu_Y-\mu_X}{\sqrt{\sigma_Y{}^2+\sigma_X{}^2}}\right)=\Phi\left(\frac{\mu_Y-\mu_X}{\sqrt{\sigma_Y{}^2+\sigma_X{}^2}}\right)$$

令常態累積機率函數中的變數為：

$$\delta=\frac{\mu_Y-\mu_X}{\sqrt{\sigma_Y{}^2+\sigma_X{}^2}}$$

上式稱為可靠度指數(reliability index)或安全指數(safety index)，當計算得到此一指數之後，即可簡單由下式計算得物品的可靠度：

$$R=1-\Phi(-\delta)=\Phi(\delta)$$

而失效機率為：

$$\begin{aligned}P_f&=1-R=1-\Pr(C>L)\\&=1-\Phi(\delta)=\Phi(-\delta)\end{aligned}$$

在工程應用上，對於供給能力或負載需要的特性值通常是以標稱值的百分數來表示其公差的變異範圍，此一表示法相當於機率理論的變異係數。因此，可靠度指數亦可寫成：

$$\delta=\frac{(\mu_C/\mu_L)-1}{\sqrt{(\mu_C/\mu_L)^2\upsilon_C{}^2+\upsilon_L{}^2}}$$

式中$\upsilon_C=\sigma_C/\mu_C$和$\upsilon_L=\sigma_L/\mu_L$分別表示供給能力與負載需要的變異係數。

以上是假設負載需要與供給能力互為獨立的條件下得到的，若考慮到兩者有統計相關時，可靠度指數必須寫成：

$$\delta = \frac{\mu_C - \mu_L}{\sqrt{\sigma_C{}^2 + \sigma_L{}^2 - 2\rho\sigma_C\sigma_L}}$$

其中，ρ**為負載需要與供給能力的相關係數。**

[**範例** 1] **某一汽車零件，其承受應力為** $X \sim nor\left(30{,}000,\, 3{,}000^2\right)$ kPa**，零件強度為** $Y \sim nor\left(40{,}000,\, 4{,}000^2\right)$ kPa**，求此零件之可靠度。**

[**解答**] **由已知條件可知，**$\mu_Y = 40{,}000$、$\sigma_Y = 4{,}000$、$\mu_X = 30{,}000$、$\sigma_X = 3{,}000$**，可靠度指數為：**

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\mu_Y - \mu_X}{\sqrt{\sigma_Y{}^2 + \sigma_X{}^2}} \\ &= \frac{40000 - 30000}{\sqrt{4000^2 + 3000^2}} \\ &= 2.0\end{aligned}$$

因此，此一零件的可靠度為：

$$R = \Phi(\delta) = \Phi(2) = 0.977$$

此一範例為已知供給能力(強度)與負載需要(應力)時求解物品的可靠度，屬於可靠度分析的工作；若是已知物品可靠度及供給能力與負載需要的部分機率參數，求解未知的參數，則是屬於可靠度設計問題，其應用情形如下列範例。

[**範例** 2] **有一新設計的零件，根據應力分析結果知道，零件承受的拉應力為** $X_1 \sim N\left(35{,}000,\, 4{,}000^2\right)$ kPa**，在製造過程中產生殘留壓應力為** $X_2 \sim N\left(10{,}000,\, 1{,}500^2\right)$ kPa**。設計時此一零件的材料強度標稱值為** 50,000 kPa**，若此一零件的可靠度需求為不得低於** 0.999**，求此材料強度之最大標準差。(假設強度及應力均服從常態分佈)**

[**解答**] **由於此一零件在其壽命週期中受到兩種應力，因此先求得等效應力** X_E**，**

$$X_E = X_1 - X_2$$

已知 X_1 **及** X_2 **均為常態分佈，且：**

$$\mu_{X_1} = 35000 \text{ kPa}, \quad \sigma_{X_1} = 4000 \text{ kPa}$$
$$\mu_{X_2} = 10000 \text{ kPa}, \quad \sigma_{X_2} = 1500 \text{ kPa}$$

因此等效應力亦為常態分佈，其平均值與標準差分別計算如下：

$$\begin{aligned}\mu_{X_E} &= \mu_{X_1} - \mu_{X_2} \\ &= 35000 - 10000 \\ &= 25000 \text{ kPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{X_E} &= \sqrt{\sigma_{X_1}{}^2 + \sigma_{X_2}{}^2} \\ &= \sqrt{4000^2 + 1500^2} \\ &= 4272 \text{ kPa}\end{aligned}$$

5.1.2 負載需要與供給能力均為對數常態分佈

若隨機變數 X 為對數常態分佈，其機率密度函數為：

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right), x > 0$$

式中μ和σ分別為$\ln x$的平均值與標準差，$\ln x$為服從常態分佈的隨機變數。對數常態分佈變數的期望值和變異數分別為：

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$V[X] = \left[\exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\right]\left[\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right]$$

假設負載需要(L)和供給能力(C)均為服從對數常態分佈的隨機變數，其機率密度函數分別為：

$$f_L(l) = \frac{1}{l\sigma_{\ln L}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln l - \mu_{\ln L}}{\sigma_{\ln L}}\right)^2\right]$$

$$f_C(c) = \frac{1}{c\sigma_{\ln C}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln c - \mu_{\ln C}}{\sigma_{\ln C}}\right)^2\right]$$

依照對數常態分佈的乘法性，若是績效函數以比值模式表示，亦即 $Z = C/L$，則績效函數亦為對數常態分佈的隨機變數。取對數後，$\ln C$、$\ln L$ 為常態分佈，利用 $\ln Z = \ln C - \ln L$ 也是常態分佈的特性，以常態分佈的計算過程獲得可靠度解。

績效函數 Z 為對數常態分佈，其機率密度函數為：

$$f_Z(z) = \frac{1}{z\sigma_{\ln Z}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z - \mu_{\ln Z}}{\sigma_{\ln Z}}\right)^2\right]$$

根據定義，可靠度為：

$$\begin{aligned} R &= \Pr(Z > 1) = \int_1^\infty f_Z(z)dz \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{z\sigma_{\ln Z}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z - \mu_{\ln Z}}{\sigma_{\ln Z}}\right)^2\right]dz \end{aligned}$$

令 $\ln Z = u$ 及 $(u - \mu_{\ln Z})/\sigma_{\ln Z} = x$，可將上式標準常態化處理得到：

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_{\ln Z}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_{\ln Z}}{\sigma_{\ln Z}}\right)^2\right]du \\ &= \int_{\frac{\mu_{\ln Z}}{\sigma_{\ln Z}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]dx \\ &= \int_{\frac{\mu_{\ln C} - \mu_{\ln L}}{\sqrt{\sigma_{\ln C}{}^2 + \sigma_{\ln L}{}^2}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]dx \end{aligned}$$

令可靠度係數 δ 為：

$$\delta = \frac{\mu_{\ln C} - \mu_{\ln L}}{\sqrt{\sigma_{\ln C}{}^2 + \sigma_{\ln L}{}^2}}$$

則可靠度與可靠度指標的關係為：

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\delta}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]dx \\ &= \int_{-\infty}^\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]dx \\ &= \Phi(\delta) \end{aligned}$$

亦即計算可靠度指標即可利用常態分佈表獲得可靠度。

在實際應用上，已知的是負載需要與供給能力的平均值與標準差(或變異係數)，並不是取對數後的平均值與標準差，因此利用下述關係式先計算取對數後的標準差與平均值：

$$\sigma_{\ln L}{}^2 = \ln\left[1+\frac{\sigma_L{}^2}{\mu_L{}^2}\right] = \ln\left[1+\upsilon_L{}^2\right]$$

$$\mu_{\ln L} = \ln\mu_L - \frac{1}{2}\sigma_{\ln L}{}^2 = \ln\left[\frac{\mu_L}{\sqrt{1+\upsilon_L{}^2}}\right]$$

$$\sigma_{\ln C}{}^2 = \ln\left[1+\frac{\sigma_C{}^2}{\mu_C{}^2}\right] = \ln\left[1+\upsilon_C{}^2\right]$$

$$\mu_{\ln C} = \ln\mu_C - \frac{1}{2}\sigma_{\ln C}{}^2 = \ln\left[\frac{\mu_C}{\sqrt{1+\upsilon_C{}^2}}\right]$$

代入可靠度指標中得到：

$$\delta = \frac{\ln\left[\frac{\mu_C}{\mu_L}\left(\frac{1+\upsilon_L{}^2}{1+\upsilon_C{}^2}\right)^{1/2}\right]}{\left[\ln\left(1+\upsilon_C{}^2\right)+\ln\left(1+\upsilon_L{}^2\right)\right]^{1/2}}$$

上式的計算頗為複雜，若負載需要與供給能力的變異係數 υ_L 及 υ_C 都很小或彼此接近相等時，$\ln\left(1+\upsilon_L{}^2\right)\approx\upsilon_L{}^2$、$\ln\left(1+\upsilon_C{}^2\right)\approx\upsilon_C{}^2$ 或 $\left(\frac{1+\upsilon_L{}^2}{1+\upsilon_C{}^2}\right)^{1/2}\approx 1$，則可靠度指標可以簡化為：

$$\delta = \frac{\ln\mu_C - \ln\mu_L}{\sqrt{\upsilon_C{}^2+\upsilon_L{}^2}}$$

5.1.3 負載需要與供給能力均為伽瑪分佈

伽瑪分佈的機率密度函數為：

$$f_X(x) = \frac{(\lambda x)^n}{x\Gamma(n)}\exp(-\lambda x),\quad n>0,\ \lambda>0,\ x>0$$

其中λ **為尺度參數、** n **為形狀參數，** $\Gamma(\cdot)$ **為伽瑪函數。**

當負載需要及供給能力均為伽瑪分佈時，其機率密度函數分別為：

$$f_C(c)=\frac{(\lambda_C c)^m}{c\Gamma(m)}\exp(-\lambda_C c),\quad m>0,\lambda_C>0,\ c>0$$

$$f_L(l)=\frac{(\lambda_L l)^n}{l\Gamma(n)}\exp(-\lambda_C l),\quad n>0,\lambda_L>0,\ l>0$$

取比值績效函數格式，亦即 $Z=C/L$ **，假設負載需要與供給能力互為獨立，則隨機變數** Z **的機率密度函數為：**

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_0^\infty l f_C(zl)f_L(l)\,dl\\&=\int_0^\infty\frac{\lambda_C{}^m\,\lambda_L{}^n}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}z^{m-1}\,l^{m+n-1}\,e^{-(\lambda_C z+\lambda_L)l}\,dl\\&=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}\frac{\alpha^n z^{m-1}}{(z+\alpha)^{m+n}}\end{aligned}$$

其中$\alpha=\lambda_L/\lambda_C$。

可靠度為：

$$\begin{aligned}R=\Pr\left(\frac{C}{L}>1\right)&=\int_1^\infty f_Z(z)\,dz\\&=\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}\int_1^\infty\left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{n+1}\left(\frac{z}{z+\alpha}\right)^{m-1}\frac{1}{\alpha}\,dz\\&=\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}\int_{\alpha/1+\alpha}^0 u^{n+1}(1-u)^{m-1}\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{\alpha}{u^2}\right)du\\&=\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}\int_0^{\alpha/1+\alpha}u^{n-1}(1-u)^{m-1}\,du\\&=\frac{\beta_{\alpha/1+\alpha}(n,m)}{\beta(n,m)}\end{aligned}$$

其中 $u=\dfrac{\alpha}{z+\alpha}$、$z=\dfrac{\alpha(1-u)}{u}$、$dz=-\dfrac{\alpha}{u^2}du$**，** $\beta_{\alpha/1+\alpha}(n,m)$ **與** $\beta(n,m)$ **分別為不完全與完全貝他函數，其定義如下：**

$$\beta(n,m)=\int_0^1 u^{n-1}\,(1-u)^{m-1}\,du$$

$$\beta_{\alpha/1+\alpha}(n,m)=\int_0^{\alpha/1+\alpha}u^{n-1}(1-u)^{m-1}\,du$$

由上式可知，負載需要和供給能力均為伽瑪分佈的可靠度，可查貝他函數及不完全貝他函數積分表獲得解答。下述三種特殊情況的可靠度計算式還可加以簡化，在應用上頗為方便，其可靠度表示式推導如下：

(1). 若 $n=m=1$，亦即負載需要和供給能力均為指數分佈，則可靠度為：

$$\begin{aligned}R&=\frac{\beta_{\alpha/1+\alpha}(1,1)}{\beta(1,1)}\\&=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}\int_0^{\alpha/1+\alpha}du\\&=\frac{\alpha}{1+\alpha}\\&=\frac{\lambda_L}{\lambda_C+\lambda_L}\end{aligned}$$

(2). 若 $m=1,\ n\neq 1$，亦即供給能力為伽瑪分佈，而負載需要為指數分佈，則可靠度為：

$$\begin{aligned}R&=\frac{\beta_{\alpha/1+\alpha}(n,1)}{\beta(n,1)}\\&=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(1)}\int_0^{\alpha/1+\alpha}u^{n-1}\,du\\&=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n=\left(\frac{\lambda_L}{\lambda_C+\lambda_L}\right)^n\end{aligned}$$

(3). 若 $m\neq 1,\ n=1$，亦即供給能力為指數分佈，而負載需要為伽瑪分佈，則可靠度為：

$$\begin{aligned}R&=\frac{\beta_{\alpha/1+\alpha}(1,m)}{\beta(1,m)}\\&=\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1)\,\Gamma(m)}\int_0^{\alpha/1+\alpha}(1-u)^{m-1}\,du\\&=1-\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^m=1-\left(\frac{\lambda_C}{\lambda_C+\lambda_L}\right)^m\end{aligned}$$

[範例] 已知一結構件的應力與強度均為伽瑪分佈，其分佈參數如下：對於應力，$n=3$、$\lambda_L=1.0$；對於強度，$m=2$、$\lambda_C=0.25$，試計算該結構之可靠度。

[解答] 根據已知條件：

$n = 3$、$m = 2$， $\alpha = \lambda_L / \lambda_C = 1.0/0.25 = 4.0$， $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} = \dfrac{4.0}{1+4.0} = 0.8$

可靠度經查不完全貝他函數積分表為：

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\beta(3,2)} \int_0^{0.8} u^2 (1-u)\, du \\ &= 0.8192 \end{aligned}$$

5.1.4 應力與強度均為指數分佈

在此情況下，強度 C 的機率密度函數為：

$$f_C(c) = \lambda_C \exp(-\lambda_C c), \quad 0 \le c < \infty$$

而應力 L 的機率密度函數為：

$$f_L(l) = \lambda_L \exp(-\lambda_L l), \quad 0 \le l < \infty$$

則可靠度為：

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty f_L(l) \left[\int_l^\infty f_C(c) dc\right] dl \\ &= \int_0^\infty \lambda_L \exp(-\lambda_L l)[\exp(-\lambda_C l)] dl \\ &= \int_0^\infty \lambda_L \exp[-(\lambda_C + \lambda_L) d] dl \\ &= \frac{\lambda_L}{\lambda_C + \lambda_L} \int_0^\infty (\lambda_C + \lambda_L) \exp[-(\lambda_C + \lambda_L) l] dl \\ &= \frac{\lambda_L}{\lambda_C + \lambda_L} \end{aligned}$$

此結果與上一節當應力與強度分別為參數 n=m=1 的伽瑪分佈相同, 因為當伽瑪分佈的形狀參數為 1 時即為指數分佈之故。

若平均強度為θ_C、而平均應力為θ_L，由於指數分佈的平均值θ為其尺度參數λ的倒數，因此在這種組合狀況下的可靠度亦可寫為：

$$R = \frac{\theta_C}{\theta_C + \theta_L}$$

5.2 近似解法

由以上討論知，要計算可靠度或失效機率，需要知道負載需要及供給能力的機率密度函數 $f_L(l)$ 和 $f_C(c)$，或者它們的聯合機率密度函數 $f_{LC}(l,c)$。但是，在實際工程可靠度問題中，很難有足夠的數據確定可些函數，因此無法應用理論公式進行計算。另外，從負載需要與供給能力為互相獨立常態分佈或對數常態分佈之隨機變數時，只要知道它們的平均值(一階矩)和變異數(二階矩)，即可輕易地計算出可靠度指標，從而獲得可靠度 $R=\Phi(\delta)$ 或失效機率 $P_f=\Phi(-\delta)$。另外，實際的工程問題中包含著許多設計變數與參數，負載需要與供給能力分別是這些設計特性的函數，此時，需要先根據這些基本設計特性求得負載需要與供給能力的機率分佈特性，可是在求這些函數的機率分佈時，往往會遇到積分上的困難。根據自然界許多現象均服從常態分佈的事實，可以假設負載需要和供給能力均服從常態分佈，若這些分佈不是常態分佈，則利用數值分析近似解法亦可獲得類似的結果。常見的近似解法有哈-林法、雷-菲法、吳氏法等，詳細可參閱一些專業的資料。

6 機率設計

大部分的可靠度設計工作在首先是瞭解使用條件需求，然後確定績效函數與關鍵失效模式，選定使用的材料，最後決定功能載具的結構尺寸。因此，設計工作中主要的計算部分是尺寸的計算。一般而言，此項計算工作以驗算的方式進行較為方便，對較為簡單的情況可通過設計計算求得主要尺寸。對於較為複雜的情況則須先作適當的簡化工作，求得初步尺寸後再進行可靠度的驗算，以下以範例說明其過程。

[範例 1] 一圓截面拉桿，受軸向力 $Q\sim N\left(400000,15000^2\right)$，所用材料的抗拉強度 $\sigma_Y\sim N\left(1000,50^2\right)$，要求不產生拉斷失效的可靠度 $R=0.999$，求所需截面直徑 d。

[解答] 本題之績效函數為：

$$g=\sigma_Y-s$$

可靠度係數為：

$$\delta=\frac{\mu_{\sigma_Y}-\mu_s}{\sqrt{\sigma_{\sigma_Y}^2+\sigma_s^2}}$$

根據材料力學，此一拉桿所承受之應力為：

$$s=\frac{Q}{\pi r^2}=\frac{Q}{\pi(d/2)^2}=\frac{4Q}{\pi d^2}$$

已知受力平均值與標準差分別為：

$$\mu_Q = 400000\,\mathrm{N}$$
$$\sigma_Q = 15000\,\mathrm{N}$$

代入求得應力平均值與標準差(μ_s與σ_s)分別為：

$$\mu_s = \frac{4\mu_Q}{\pi(\mu_d)^2} = \frac{4\times 400000}{3.14(\mu_d)^2} = \frac{509296}{(\mu_d)^2}$$

$$\sigma_s \approx \left[\left(\frac{\partial s}{\partial Q}\right)_0^2 \sigma_Q^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)_0^2 \sigma_d^2\right]^{1/2}$$
$$= \left[\left(\frac{4}{\pi\mu_d^2}\right)^2 \sigma_Q^2 + \left(-\frac{8Q}{\pi\mu_d^3}\right)^2 \sigma_d^2\right]^{1/2}$$

根據一般製造水準，假設製造工藝容差$T_d = \pm 0.0075\mu_d$**，且**$T_d = 3\sigma_d$**，因此直徑標準差可以用直徑平均值表示之：**

$$\sigma_d = \frac{0.0075\mu_d}{3} = 0.0025\mu_d$$

所以應力標準差可以改寫為：

$$\sigma_s = \left[\left(\frac{4}{\pi\mu_d^2}\right)^2 (15000)^2 + \left(-\frac{8\times 400000}{\pi\mu_d^3}\right)^2 (0.0025\mu_d)^2\right]^{1/2}$$
$$= \left[\frac{364756000}{\mu_d^4} + \frac{6484556}{\mu_d^4}\right]^{1/2} = \frac{19286}{\mu_d^2}$$

另外已知

$$\mu_{\sigma_Y} = 1000$$
$$\sigma_{\sigma_Y} = 50$$

可靠度需求$R = 0.999$**，相對應之可靠度係數為：**

$$\delta = \Phi^{-1}(R) = \Phi^{-1}(0.999) = 3.291$$

因此：

$$\delta = 3.091 = \frac{1000 - \dfrac{509296}{\mu_d^2}}{\left(50^2 + \dfrac{19268^2}{\mu_d^4}\right)^{1/2}}$$

參考文獻

1. Kapur, K.C. & Lamberson, L.R., Reliability in Engineering Design,