可靠度技術手冊

可靠度統計分析技術

彭鴻霖　編著

中華民國八十九年十二月十八日

可靠度統計分析技術

目 錄

可靠度統計分析技術

1 前言

可靠度工程技術是建立在機率理論和數理統計的基礎上，對於一個研發專案計畫而言，可靠度需求與規格的制定、可靠度模型的建立與配當、可靠度設計與分析等事前預防性的工作，需要機率理論的應用；而當硬品原型構建完成之後的可靠度驗證與評估工作，如可靠度成長的規劃與管理、可靠度鑑證試驗的規劃與執行、可靠度參數的推定與檢定等，則完全建立在數理統計的基礎上。因此，數理統計也是從事可靠度的工作者所必備的重要基礎知識。

為了瞭解一個隨機變數的機率分佈及其分佈參數和各種可靠性特徵量，需要針對產品的可靠度特徵，如功能、強度、失效時間或壽命，執行大量的觀察或試驗檢測工作，根據觀測所得到的數據，應用統計分佈理論可以確定出某隨機變數的機率分佈類型、分佈參數，進而獲得可靠度特徵量。例如，某廠一天生產一千根鋼筋，要找出鋼筋強度的分佈規律，就要進行試驗，其中一種方法是對全部鋼鐵進行逐個試驗，用所得的全部試驗數據找出強度分佈規律。這種方法所得的結果是最理想的，但實際上是不可能的，因為這樣既費時間又不經濟，對於破壞性試驗，更是不允許的。另一種方法是從每天生產的全部鋼鐵當中隨機抽取一部份進行試，然後根據局部試驗數據對所研究的鋼筋強度分佈規律進行適當估計，合理的分析及科學的判斷，這種方法是切實可行的，也是統計分析所要研究的內容。

概括地說，數理統計分析是從局部量測所得數據出發，將數據經過適當的處理後，對所研究的對象進行分析(analysis)、推定(estimation)、檢定(testing)、或推測(projection)的工作。本章首先簡要敘述產品可靠度分析的內容，包括：各種可靠度特徵量，可靠度數據來源，可靠度數據分類，數據處理方法與可靠度評估概論等；其次說明在可靠度數理統計中常用的統計分析技術，包括：抽樣與抽樣分佈，參數的統計推定，假設檢定，機率分佈的適合度檢定等；最後針對常態分佈、指數分佈、二項分佈、韋伯分佈等可靠度工程常用的機率分佈，分別說明其參數推定與可靠度分析方法，包括：參數的抽樣分佈，參數的點推定、區間推定，參數的貝氏推定，機率圖紙推定，及可靠度分析等。至於機率理論與抽樣計畫則可參考其他章節或相關文獻之說明。

2 產品可靠度分析

2.1 產品可靠度特徵量

一般產品的可靠度特性按照數據之工程上的特性大體上可分為功能、結構、和時間三類。由於構成產品可靠度特性的各種特性變數與參數大多具不確定性，因此可以使用適切的機率分佈來加以描述。一般決定產品特性機率分佈的方法不一，有時可根據工程經驗決定數據的機率分佈種類，例如一般的物性、功能多以二項分佈、常態分佈、對數常態分佈等機率分佈來描述，結構強度多為常態分佈、對數常態分佈、韋伯分佈、瑞雷分佈等機率分佈來描述，而時間數據則多以指數分佈、韋伯分佈、常態分佈等機率分佈來說明。

描述產品特性的機率分佈函數通常是由常數、參數與變數所構成的，其中變數即為代表特性的隨機變數，參數則隨產品不同而異。一般常見的機率分佈參數有位置參數(location parameter)、尺度參數(scalar parameter)與形狀參數(shape parameter)，例如指數分佈只有一個參數：尺度參數λ；常態分佈有兩個參數，分別為位置參數μ和尺度參數σ；而韋伯分佈則三個參數都有，不過在實務上一般以二參數韋伯居多，分別為尺度參數η和形狀參數 m。

2.2 可靠度數據來源

可靠度數據主要有試驗數據(test data)與現場數據(field data)兩個主要來源。試驗數據得自研製過程所執行的各項與可靠度相關的試驗，可以提供可靠度數據的試驗項目很多，例如按研製階段可分為發展試驗、鑑定試驗和接收試驗；若按試驗技術則可分為性能測試、環境試驗和壽命試驗；而在壽命試驗又依獲得壽命數據的方式又可區分為操作壽命試驗、加速壽命試驗。有關可靠度試驗詳見整體可靠度試驗規劃、壽命試驗等章節。試驗數據通常透過「失效報告、分析與改正行動作業(FRACAS)」而獲得。至於現場數據主要是得自現場實際使用時的監測和任務操作時的結果，一般是從使用維修記錄(operational and maintenance records)或「數據報告、分析與改正行動作業(DRACAS)」中擷取得。

2.3 可靠度數據分類

如前所述，可靠度數據可分為功能、結構和時間等三類，其中以時間最為普遍，因此以下的討論將以時間數據為主，時間數據分為失效時間與壽限兩類，。根據實際觀測得的數據量與預期觀測樣本數量之間的關係以及觀測時機，量測數據又可分為完全數據(complete data)、中止數據(censored or truncated data)、及檢驗數據(inspction data)三種，如圖 1 所示。

完全數據為所有的失效數據都有完整的失效時間，亦即所有的試件都試驗至失效。

中止數據又稱檢剔數據，當試驗至一定時間或失效數時即中止試驗，因此在試驗停止時有部份試件仍然是正常的，其壽命大於試驗中止時間。中止數據又分為 I 型中止和 II 型中止兩種，I 型中止為到達一定試驗時間時停止試驗，II 型中止則是當一定數量的失效發生時停止試驗。一般而言，I 型中止在實務上用的多，主要是因為時間控制容易，而 II 型中止則在學術界討論的多，原因是其理論基礎在統計數學上比較有依據。

檢驗數據通常是在定期監測之結果，又可分為單點檢驗和區間檢驗數據兩種。單點檢驗大多為單發功能件，使用一次該試件即破壞，試驗時成功只能說成功時間大於等於試驗時間，若試驗失效則失效時間可能在開始與試驗時間之間。區間檢驗數據的試件大多是功能可重複測試者，或失效可更換零件者，因此若發生失效，很明顯的，失效時間一定是在兩次檢驗之間發生。通常檢驗數據的分析推定結果較差，若要具有足夠信賴水準，則必須有較多的樣本資料或較精確的統計分析技術。

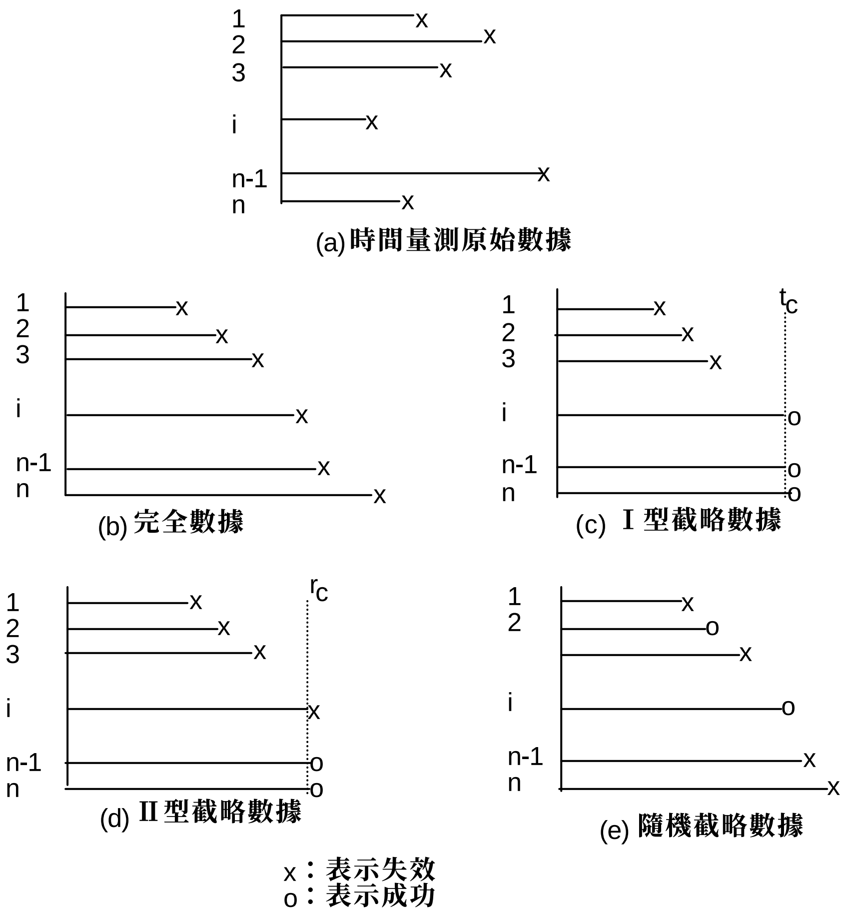

圖 1: 時間量測數據之種類

2.4 數據處理與分析方法

量測數據為樣本的觀測值，觀測的目的在追求樣本所代表群體的特性，而群體的特性，不管是特性本身或樣本的統計量都是隨機變數。按統計上的特性可分為斷續性(計數型)變數和連續性(計量型)變數兩類。常見的觀測數據分析方法有表列法、圖解法、和數值分析法三種。表列法與圖解法為最簡潔、快速的方法。若要更進一步研究數據的特性，則應採用較精確的數值分析法。

圖解法有直方圖或柏拉圖、扇形圖或圓餅圖、趨勢圖、機率圖等。常用機率圖包括韋伯分佈機率圖、常態分佈機率圖、對數常態機率圖及極值分佈機率圖。

應用機率圖的圖解法又稱為非參數法(non-parametric method)，主要是在無法確定機率分佈的情形下，利用次序統計學(order statistics)的次序(order)與位階(rank)的統計關係，從量測得的數據利用機率圖座標轉換的處理，經過分析推論物品的可靠度。另外，有時候雖然知道機率分佈，但是所獲得的數據僅僅是失效個數，而無精確的失效時間數據，此時也必須運用非參數法來獲得可靠度的推論值。

數值分析法又稱為參數法(parametric method)，需要應用機率特性與統計推論技術。當產品可靠度特性的機率分佈類型確定或假設為已知時，即可估算機率分佈的參數。

常用的參數估算法有最大概似法(maximum likelihood method, MLE)和轉矩法(method of moment, MOM)。前者一般數學較複雜，常需利用電腦程式才能輕易獲得解答；後者數學上較簡單，通常由對原點的一階轉矩μ與樣本平均數$\bar{x}$及對平均數的二階轉矩σ^2與樣本標準差s之間的關係，即可求解群體分佈的參數。確定機率分佈的參數之後，進而可推論可靠度值。

2.5 可靠度評估概論

一般經由測試所量測得的個別數據，經由適切的評估程序計算所需的可靠度機率分佈參數，根據可靠度函數即可評估任何已知需求條件下的可靠度評估值。推論機率分佈參數常用的方法主要有推定(estimation)與檢定(testing)兩種方法。

推定是由個別量測數據組成的樣本數據計算樣本統計量(平均數$\bar{x}$及標準差s)，然後根據統計理論求得群體參數之推定值；由於群體機率分佈參數係依據樣本的測試數據計算得，參數的統計量為隨機變數，必須選用適切的機率分佈來描述之，常用的樣本分佈為常態分佈。因此參數的推定值有點推定(point estimation)和區間推定(interval estimation)兩種。

檢定則是假設群體參數為已知的某些特定值，然後利用統計假設檢定原理，證明群體參數為那一個假設值。推論可靠度參數所使用的方法的抽樣計畫決定試件樣本數、試驗時間及允收/拒收準則。

除了直接由量測數據推論計算可靠度參數外，亦可由過去所建立的資料庫數據預估可靠度；或者由試驗量測數據配合過去的量測數據或工程經驗，利用貝氏理論推論可靠度參數，此為貝氏評估法。

另外，累積可靠度參數隨時間的變化趨勢，可利用迴歸分析或時序分析法，配合適切的可靠度成長模型，推測(project)未來時間的可靠度值。整個可靠度評估邏輯如圖 2 所示。

3 抽樣與抽樣分佈

3.1 個體與群體

在討論品質與可靠度問題時，我們關心的是產品性質的好壞程度，這些性質的觀測資料可以分為個體(individual)與群體(population)兩類。個體是指個別產品性質的觀測值，而群體則是指所有產品性質的觀測值，即所研究對象的全體。例如，以鋼筋為研究的對象，鋼筋強度就是一種性質，一根鋼筋的強度是個體，而 1000 根鋼筋強度的全體就是群體；又如，研究零件某一加工尺寸的容差，一個零件該項尺寸容差是個體，則所有零件的該項尺寸容差就是一個群體；另外如一部發射機的功率、一個滾動軸承的壽命等均為個體，而所有發射機的功率和所有滾動軸承的壽命則為群體。因此群體可以是功能、尺寸、強度、失效時間或壽命等，它是表徵研究對象數量的全體。

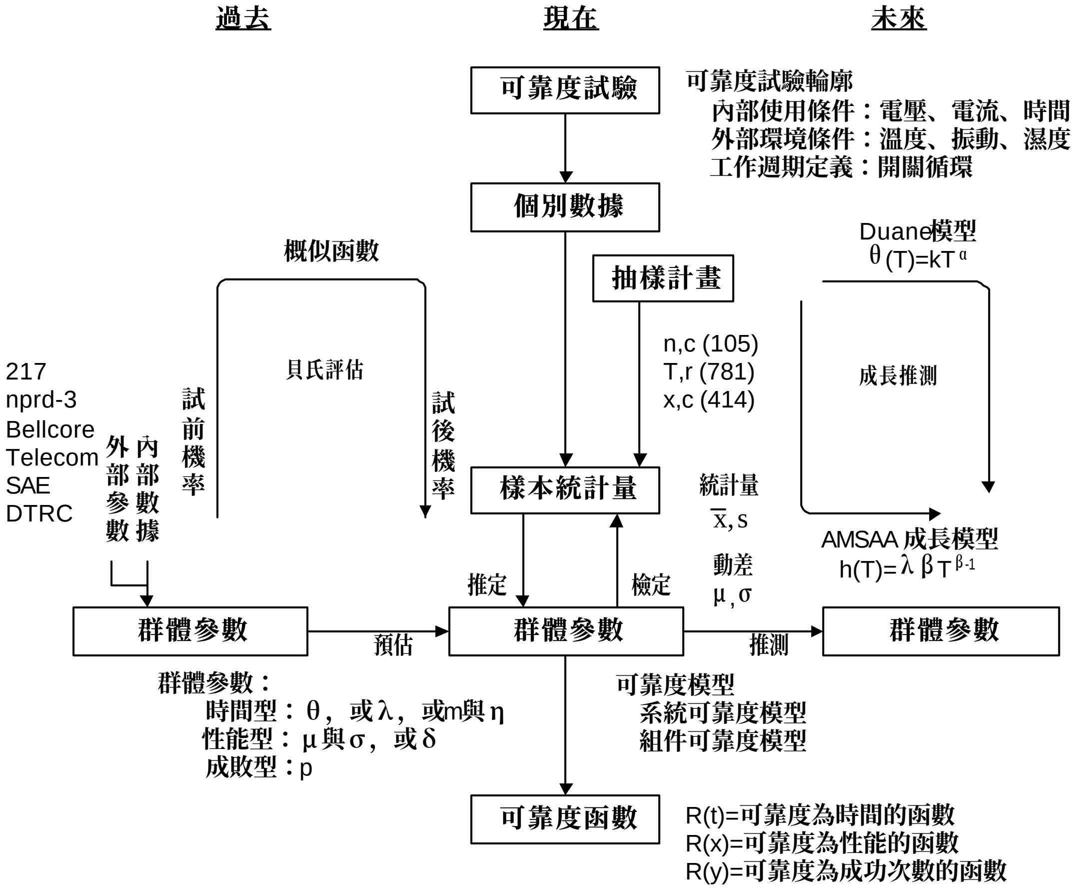

圖 2 可靠度評估邏輯

按照構成群體的數目分為有限群體和無限群體，比如前述 1000 根鋼筋強度就是有限群體，又如研究某軸承廠五月份生產的軸承的次級品率也是有限群體。如果研究某種型號軸承的壽命，通常把相同條件下所有可能生產的這種軸承壽命的全體看成一個群體，這就是一個無限群體。有限群體在數學上處理較難，而無限群體往往比較容易做近似處理。不過，當組成有限群體的個體數相當多時，也可將之視為無限群體來處理。

3.2 抽樣和樣本

顯然地，群體的真正性質是由構成群體的所有個體的性質所決定的，因此，必須觀測群體中每一個體的性質，才能夠確實掌握群體性質。然而在實務上，人力、物力及時間等資源是有限的，甚至於有些觀測工作本身是破壞性的，在這種限制條件下，很難觀測所有個體的數據來瞭解群體的特性，只能從群體中選取部份或局部的個體進行觀測，然後利用所抽得的局部個體的數據推論群體的分佈性質。這種從群體中抽取部份個體執行觀測工作的動作一般稱之為抽樣(sampling)。

在抽樣過程中所抽取的個體的集合體稱為樣本(sample)，記為$(X_1, X_2, ..., X_n)$，樣本中的個體稱為樣品，記為$X_i(i=1,2,...,n)$。X_i是隨機變數，為不可預知的數值，每一次觀測個體所得到的數據稱為樣本觀測值，記為$x_i(i=1,2,...,n)$。樣本中的個體數目 n 稱

為樣本大小或樣本數量(sample size)。按 n 的大小可分為大樣本和小樣本，一般$n \le 20$為小樣本，$n \ge 30$以上為大樣本。在實務上，樣本中的個體又稱為試件(test item or unit under test, UUT)。

應用數理統計技術進行處理與分析，可以由局部個體數據推斷群體的各種特徵，在某種程度上反映群體的性質，因此所選取的每個個體都應該要有代表性。所謂樣本的代表性，就是指個體與群體應該有相同的分佈。當然樣本不可能完全精確無誤的反映群體的特性，為了能用局部個體數據去研究群體的分佈資料，在抽取樣本時，應該從群體中隨機的抽取，不可以做偏頗性的挑選，以減少由於只有觀測部份個體或樣本所造成的誤差，也就是說抽樣時必須掌握隨機抽樣(random sampling)的精神。因此，一般所謂的抽樣是指隨機抽取樣本的過程。

3.3 統計量

假設$(X_1, X_2,..., X_n)$為由群體 X 中隨機抽取的 n 個的樣本，而$g(X_1, X_2,...X_n)$為此一樣本的一個連續函數，如果此一函數中除了樣本觀測值之外，不包含任何未知參數，則稱$g(X_1, X_2,..., X_n)$為群體 X 的一個統計量。如果$(x_1, x_2,..., x_n)$是樣本的一組觀測值，則$g(x_1, x_2,..., x_n)$是統計量$g(X_1, X_2,..., X_n)$的觀測值。

一般而言，樣本$(X_1, X_2,..., X_n)$是由 n 個相互獨立的隨機變數所構成的，不同樣本求得的統計量都不盡相同。因此，樣本函數的統計量也是隨機變數，而後面介紹的機率分佈參數之推定與檢定、機率分佈之適合度檢定、決策分析判斷等數理統計技術，常常需要用到各式各樣的統計量，例如樣本平均值、樣本變異數、樣本標準差及樣本變異係數，來進行推算估計。

樣本統計量可以根據樣本觀測值估算得，例如樣本大小為 n，其觀測值分別為 $x_1, x_2,..., x_n$，則可由下式可以分別計算得樣本平均$\bar{x}$、樣本變異數s^2及樣本標準差 s 等統計量：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

為了表達樣本分佈的相對分散性，統計上常用樣本變異係數 cov(x)，

$$\mathrm{cov}(x) = \frac{s}{\bar{x}}$$

3.4 抽樣分佈與次序分佈

群體分佈是客觀存在的，但在實際上往往不可能對群體全部逐一進行試驗，因此無法確知群體分佈的真貌，所以，群體分佈只能視為理論分佈。

抽取一個樣本可以計算得到一組統計量，另外隨機抽取一個樣本也可得到另一組統計量，如不斷重複抽取下去，可得到很多個的樣本觀測值，相對得到很多組的統計量。我們已知，樣本$(X_1, X_2, ..., X_n)$是 n 個相互獨立的隨機變數，而作為樣本函數的統計量也是隨機變數，因此統計量也必然有其分佈規律，統計量的分佈稱為抽樣分佈(sampling distribution)，例如：常態分佈參數 μ 的抽樣分佈亦為常態分佈，而指數分佈參數 λ 的抽樣分佈為伽瑪分佈等。要確定統計量的抽樣分佈一般是很麻煩的，不過根據每一組的樣本觀測值可以作出一個分佈，稱之為次序分佈(order distribution)，這是一種經驗分佈。利用次序分佈的統計特性經過適當的處理分析可以推論群體的分佈特性，以下說明次序分佈的特性及其應用。

比如，某種型號滾動軸承壽命的全體為群體 T，設隨機變數 T 的機率密度函數為 $f_T(t)$，其累積分佈函數為$F_T(t)$。假如從該群體中隨機抽取樣本大小等於 n 的樣本為 $T_1, T_2, \ldots, T_n$，其中經獨立的觀測得到的一組 n 個樣本值將它們按照由小到大的次序(order)排列，即：

$$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$$

則第 i 個觀測值 t_i 的累積分佈函數 $F_n(t_i)$ 即可確定。另外再進行一組樣本數量同樣為 n 的試驗，得到另一組 n 個與第一次不同的觀測值：

$$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$$

則對應於任何一觀測值 t_i 的累積分佈函數 $F_n(t_i)$ 也可確定。如此重複地抽樣做下去，就可以得到許多組的 $F_n(t_i)$ 的數值。顯然 $F_n(t_i)$ 是一個隨機變數，必然也會服從某種分佈。

由於隨機抽樣原則，每個觀測值 t_i 都具有相同的選取機率，亦即其機率密度函數 $f_n(t_i)$為：

$$f_n(t_i) = \frac{1}{n}$$

因此，其經驗之累積分佈函數 $F_n(t_i)$ 為：

$$F_n = \begin{cases} 0 \quad , & t < t_i \\ \dfrac{i}{n} \quad , & t_i \le t < t_{i+1} \\ 1 \quad , & t \ge t_n \end{cases}$$

$F_n(t_i)$代表次序的累積特性，因此又稱為位階(rank)，其直觀意義為事件$\{T < t_i\}$發生的機率，即：

$$F_n(t_i) = P_r\{T < t_i\}$$

理論上，當$n \to \infty$時，次序累積分佈函數$F_n(t_i)$以趨近於 1 的機率均勻地收斂於隨機變數 T 的群體分佈$F_T(t)$。因此，$F_n(t_i)$可以作為$F_T(t)$的近似估計，n 越大，近似性越好，反之，n 越小，$F_n(t_i)$與$F_T(t)$之間的誤差越大。因此，對於小樣本(n<20)常用平均位階(rank)或中位位階(median rank)代替$F_n(t_i)$。以下說明求平均位階與中位位階的方法。

經理論證明，位階$F_n(t_i)$應該服從貝他分佈，其機率密度函數為：

$$f[F_n(t_i)] = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F_n(t_i)]^{i-1}[1-F_n(t_i)]^{n-i}$$

其中$0 < F_n(t_i) < 1$，i 和$n-i+1$為貝他分佈的參數。

為說明方便起見，令新變數$U = F_n(t_i)$，則$f[F_n(t_i)] = f(u)$，而上式可改寫為：

$$f(u) = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!}u^{i-1}(1-u)^{n-1} = bet(u;i,n-i+1)$$

其中$0 < u < 1$，其累積分佈函數為：

$$F(u) = \int_0^u f(\xi)d\xi$$

對$F_n(t_i)$求數學期望值為：

$$E[U] = E[F_n(t_i)] = \frac{i}{n+1}$$

此一期望值又稱為平均位階(mean rank)，可以做為$F_n(t_i)$的推定值。

如令$F(u) = 0.5$，則相對應的 u 值就是$F_n(t_i)$分佈的中位數，稱為中位位階(median rank)。根據理論分析，中位位階也可用下列近似公式表示：

$$F_n(t_i) \approx \frac{i-0.3}{n+0.4}$$

當已知n和i的數值，即可用它$F_n(t_i)$求出中位位階的推定值。

一般而言，平均位階和中位位階均可用以推論群體的機率分佈，不過平均位階計算方便，用得較多，但當 n 較小時，特別是群體為非對稱型的分佈，如韋伯分佈等，

採用中位位階更好些。平均位階和中位位階的數值除可由上述公式計算得之外，也可由數表中查得。當 n 較大時，上述三種計算方法所得結果都差不多。

4 參數統計推定

在可靠度研究中常須應用到的各種機率分佈及其參數的特徵值，而這些機率分佈、參數和各種可靠性特徵值往往都是未知的，需要根據樣本的觀測值進行機率分佈參數的推定。例如，失效時間呈指數分佈時，必須知道失效率 λ 或平均失效時間 η，才能掌握可靠度狀況；其他如常態分佈的 μ 和 σ、韋伯分佈的 m 和 η、二項分佈的 p 等。若按樣本觀測值推定未知參數的大致是某個值，此種推定值稱為點推定；若估計在某一給定信賴水準下，未知參數可能在某個區間內稱為區間推定，估計得的推定值範圍界限稱為信賴界限。參數推定有許多種方法，每種方法都有其精度與誤差，所適用的群體分佈也不儘相同，因此應該有些評選準則來決定那一種方法所獲得的參數推定值是最適宜的。

4.1 推定量的評選準則

對同一個參數用不同方法推定可能得到不同的推定值，下面介紹幾個較為常用的評選準則：

(1). 無偏性(unbiased)：推定值是隨機變數，各次抽得的樣本推定值 $\hat{\theta}$ 並不相同，無法要求推定值就是未知參數的真值，但希望 $\hat{\theta}$ 在真值 θ 附近擺動，而且它的數學期望值就是真值，即：

$$E\left[\hat{\theta}\right]=\theta$$

符合這個條件的 $\hat{\theta}$，稱為 $\hat{\theta}$ 是 θ 的無偏推定值，它的優點是多次重複抽樣不會有 θ 推定值的系統偏差。

(2). 有效性(effective)：若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是同一未知參數 θ 的兩個無偏推定值，如果兩個推定值的變異數具有下列特性：

$$V\left[\hat{\theta}_1\right]<V\left[\hat{\theta}_2\right]$$

則稱 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效，即 $\hat{\theta}_1$ 分散性小，進一步說，對於一定樣本數量 n，$V[\theta]$ 為最小值的無偏推定值 $\hat{\theta}$ 稱為 θ 的有效推定值。

(3). 一致性(consistent)：一般樣本數量 n 越大，越能精確地推定未知參數，因此隨著 n 的無限增大，推定值 $\hat{\theta}$ 將儘量趨於真值，若對任意極小量 $\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right]=1$$

則稱$\hat{\theta}$為θ的一致推定值。

上面介紹了三種推定未知參數的評定準則：無偏性、有效性和一致性。一致性在樣本數量很大時才能衡量推定值的好壞，在實用中難以辦到。無偏性在直觀上比較合理，尤其在樣本數量很小時，更顯得重要，然而並不是每個參數都有無偏推定值。有效性無論在直觀上或理論上都比較合理，因此最受人們的重視。以下介紹各種參數推定方法。

4.2 參數點推定方法

機率分佈參數的推定方法有許多種，常用的方法有：轉矩推定法、最大概似推定法、最小平方推定法、圖解推定法和貝氏推定法等。在這幾種推定方法中，轉矩推定法比較簡單，而且不管分佈類型是否已知，對任意群體都能適用，但是該推定值往往有效性較差而且有偏。最大概似推定法具有很好的性質，因而是常用的一種重要方法，但是它只有在群體分佈類型已知的情況下才能使用，而且往往有偏的。最好的推定值在許多情況下可能不存在，即使存在也很難求得，或不能用明顯表達式表示。如果將推定值的範圍僅限於線性型的推定值時，往往就較易的求得，例如最小平方推定法中的最佳線性無偏推定就是變異數最小的無偏推定。圖解參數推定法簡單直觀，但精度不高。總之，各種推定方法各有其優劣點，不可能各方面都好，在應用時須按具體情況加以選擇，以下介紹幾種常用的推定方法。

4.2.1 轉矩推定法

在介紹轉矩推定法之前，首先簡單敘述機率分佈轉矩(moment)的定義。已知隨機變數X之機率密度函數為$f(x)$，若g為隨機變數X的函數，則函數$g=g(X)$的期望值的定義為：

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

若$g(X)=X^k$，則其期望值記為μ_k，代入上式：

$$\mu_k=E[X^k]=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

μ_k稱為隨機變數X的k階原點轉矩；當$k=1$時，μ_1為X的一階原點轉矩，又稱為平均值，一般簡記為μ；μ_2為X的二階原點轉矩，又稱為均方值(mean square value)。

若$g(X)=(X-\mu_1)^k$，其期望值一般記為η_k，代入期望值之定義：

$$\eta_k=E\left[(X-\mu_1)^k\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)^k f(x)dx$$

η_k稱為隨機變數X的k階中心轉矩；當$k=2$時，η_2為X的二階中心轉矩，又稱為變異數，一般記為σ^2。

一階原點轉矩μ_1、二階原點轉矩μ_2與二階中心轉矩σ^2(即η_2)之間有如下的關係：

$$\sigma^2=\mu_2-\mu_1{}^2$$
$$\mu_2=\mu_1{}^2+\sigma^2$$

亦即，均方值等於平均值之平方與變異數之和。

若$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$是群體X中樣本數量為n的一組樣本，則：

$$\hat{\mu}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^k\left(k=1,2,\cdots\right)$$

稱為k階樣本原點轉矩。而

$$\hat{\eta}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^k\left(k=1,2,\right)$$

稱為k階樣本中心轉矩。

顯然，樣本的各種轉矩反映了群體各種轉矩的訊息。轉矩法的基本原理就是用樣本的各階轉矩去推定群體的各階轉矩。同樣，可以用樣本數據特徵量做為相對應群體數據特徵量的推定值。前面的例子就是用樣本的平均值推定群體的平均值，也就是說，用樣本的一階原點轉矩推定群體的一階原點轉矩：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{X}$$

同樣的，也可用樣本二階中心轉矩推定群體的二階中心轉矩或變異數，即：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2=s^2$$

這些推定結果都稱為轉矩推定值，可以用於推定常態分佈的參數μ和σ。但是，有些機率分佈，其參數與轉矩的關係不這樣直接，例如要推定韋伯分佈的三個參數(η、m及γ)就沒有相對的樣本轉矩與之對應。這時，可利用群體的各階轉矩所包含這些待推定參數確定方程式，解此方程式就可以得到一組解，得到待推定參數的推定值。若群體機率分佈有q個參數，則其k階原點轉矩為：

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q\right),(k=1,2,\cdots,q)$$

由上式可知，μ_k 為$(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q)$之函數，亦即：

$$\mu_k=\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)$$

若$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$是群體 X 的一個樣本的 n 個觀測值，則由這些觀測值可求出 k 階樣本轉矩：

$$\hat{\mu}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,k},(k=1,2,\cdots)$$

解方程式組：

$$\hat{\mu}_k=g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)=\mu_k,(k=1,2,\cdots,q)$$

即可求得參數$\theta_j(j=1,2,\ldots,q)$的點推定值為：

$$\hat{\theta}_j=\theta_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),(j=1,2,\cdots q)$$

4.2.2 最大概似推定法

當群體的分佈類型為已知時，常用最大概似推定法求群體未知參數的推定值。一般來講，最大概似推定法的基本原理為：群體的分佈類型已知，其待推定參數為θ，它可以取很多值，在θ的全部可取值中選取一個能使樣本觀測結果(即一事件出現機率最大的$\hat{\theta}$，稱$\hat{\theta}$為θ的最大概似推定值。這種參數推定的方法稱為最大概似推定法。

對於分立型隨機變數的群體 X，若群體分佈中含有一個未知參數θ，其機率質量函數為$p(x;\theta)$，則群體中任何一數 x_i 的出現機率可寫成：

$$P_r(X=x_i;\theta)=p(x_i;\theta)$$

它相當於抽得第i個樣本x_i的機率。現從群體中隨機抽取一樣本數量為n，樣本觀測值為$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的樣本，則抽得這一組樣本觀測值的機率，亦即其概似函數(likelihood function) $L(\theta)$為：

$$L(\theta)=p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)\cdots p(x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

若 X 為連續型隨機變數的群體，群體的機率密度函數為$f(x_i;\theta)$，則隨機抽取 n 個樣品時，第 i 個樣品 x_i 出現的機率為$f(x_i;\theta)dx_i$，則此一組樣本的概似函數$L(\theta)$為：

$$L(\theta)=[f(x_1;\theta)dx_1][f(x_2;\theta)dx_2]\cdots[f(x_n;\theta)dx_n]=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)dx_i$$

若是樣本為由參數為θ之群體中隨機抽取的，則其出現機率應為最大，根據極大值極小值原理，概似函數對參數θ的一階微分為零，亦即兩者之間有著下述關係：

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0 \tag{11}$$

求解上述方程式即可求得最大概似推定值θ，所得到的結果稱為最大概似推定值。

當群體包含 q 個未知參數，其概似函數可寫成：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_q) \tag{12}$$

又因為 $L(\theta)$ 與 $\ln[L(\theta)]$ 同時達到最大值，有時利用 $\ln[L(\theta)]$ 求最大值的計算較為方便，故解概似方程組：

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta_j}=0,(j=1,2,\cdots,q) \tag{13}$$

或

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta_j}=0,(j=1,2,\cdots,q) \tag{14}$$

即可求得機率分佈參數的一組最大概似推定值 $(\theta_1,\theta_2,...\theta_q)$。

4.2.3 最小平方推定法

回歸分析法是數學中解決變數之間關係的一種方法，在可靠度觀測數據的統計分析中，它不僅可以進行參數推定、有關可靠度指標的計算，而且還可以進行分佈類型的檢定。以下介紹回歸分析法中最常用的一元線性回歸分析法。

假設在某一試驗過程中有一個可以控制的變數 x，試驗結果為 y。當 x 變化時，試驗結果 y 也隨著變化。但由於在試驗過程中試驗誤差的影響，例如試驗設備的誤差、測試儀器的誤差、人員觀測誤差、氣候環境誤差等等，即使對同一個 x 值重複多次試驗，試驗結果 y 也隨機變動。因此，因變數 y 是一個隨機變數，也就是說，y 與 x 之間沒有一個完全確定的函數關係。但對於多數數據值進行分析，x 與 y 之間的函數關係就會呈現出某種趨勢，從而尋找出它們之間的關係。變數之間最簡單的關係是線性關係，在實際情況中，有許多變數之間是線性關係。另外，雖然有些情況變數之間是非線性關係，但經過適當的數學轉換，仍然可以變為線性關係來處理，因此，以下以一元線性關係為典型進行介紹。

假如在試驗中獲得n對試驗數據：$(x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots(x_n, y_n)$，將它們繪製在直角座標紙上，從圖形上可看出，數據點大體上散布在某條直線的週圍，變數間近似地呈現為線性關係，我們可以首先作出一條直線，設直線方程式為：

$$\hat{y} = A + Bx \tag{15}$$

上式中$\hat{y}$上方加「︿」是為了區別於實際觀測值y。參數B為該直線的斜率，A為截距。

由回歸方程式可知，當 $x = x_i$ 時，實際觀測值與回歸推測值的關係為：

$$\begin{aligned} y_i &= \hat{y}_i + e_i \\ &= A + Bx_i + e_i \end{aligned} \tag{16}$$

其中e_i為觀測的隨機偏差，由上式可求得此一觀測偏差值為：

$$e_i = y_i - (A + Bx_i) \tag{17}$$

上述回歸直線方程式 $\hat{y} = A + Bx$ 中，由於 A、B 為未知參數，滿足此一函數的直線可能有無限多條，顯然其中只有一條直線最接近原來的 n 個觀測數據，要獲得此一直線，等於是要確定參數 A和 B的問題。

由直線式可知，偏差 e_i 的平均和 Q僅為參數 A和 B的函數，亦即：

$$Q(A,B) = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2 \tag{18}$$

所謂確定參數 A 和 B 的最小平方法，就是要選擇適當的$\hat{A}$和$\hat{B}$，使得上述偏差平方和達到最小。為此，分別求 Q對 A、B的偏微分，並令其為零，即：

$$\frac{dQ}{dA} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i) = 0 \tag{19}$$

$$\frac{dQ}{dB} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)x_i = 0 \tag{20}$$

此處令：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{21}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{22}$$

則方程式組的解為：

$$\hat{A} = \overline{y} - \hat{B}\overline{x} \tag{23}$$

$$\hat{B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} \tag{24}$$

式中 $\hat{A}$ 、$\hat{B}$ 分別是參數 A、B 的最小平方推定值，代入回歸方程式，即可得到 y 對 x 的一元線性回歸方程：

$$\hat{y} = \hat{A} + \hat{B}x \tag{25}$$

$\hat{B}$ 稱為迴歸係數，$\hat{A}$ 稱為常數項，兩者皆為試驗結果 $y_1,\cdots,y_n$ 的線性函數。

假設 n 次試驗結果 $y_1,\cdots,y_n$ 相互獨立，且變異數相等，

$$V[y_1] = V[y_2] = \cdots = V[y_n] = \sigma^2 \tag{26}$$

則 $\hat{A}$ 與 $\hat{B}$ 最小平方推定值的變異數分別為：

$$V[\hat{A}] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \right) \tag{27}$$

$$V[\hat{B}] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \tag{28}$$

理論可證明在相互獨立假設下，相對於所有參數 A 與 B 的線性無偏推定值，最小平方推定 $\hat{A}$ 與 $\hat{B}$ 的變異數最小，這種推定結果又稱為最佳線性無偏推定值(best linear unbiased estimates)，簡稱 BLUE。以上推導係以兩個參數的前題，且在試驗結果 $y_1,\cdots,y_n$ 相互獨立且變異數相同的假設下得到的。

對於一般情形，且試驗結果 $y_1,\cdots,y_n$ 是相關的，則必須利用高斯-馬爾可夫定理，利用矩陣演算法則，求解參數 θ 的 BLUE，其過程如下：

$$E[Y] = X\theta$$

$$V[Y]=\sigma^2 C$$

$$\hat{\theta}=\left(X'C^{-1}X\right)^{-1}X'C^{-1}Y$$

$$V\left[\hat{\theta}\right]=\left(X'C^{-1}X\right)^{-1}\sigma^2$$

式中 Y 為試驗結果向量，X 為可控變數 $x_1,\cdots,x_n$ 所構成的矩陣，θ 為參數向量，C 為協變異數(covariance)矩陣。

對於一些常用的機率分佈，例如韋伯分佈、對數常態分佈，已有人進行 BLUE 的推導，得到參數推定值的計算式，並製作了表單資料，可直接引用。其通式為：

$$\hat{\theta}=\sum_{k=1}^{n}D(n,r,k)\,y_k \tag{29}$$

式中 $D(n,r,k)$ 為相對於各個參數由試驗樣本 n、試驗截止數 r 及序數 k 決定的常數值。

當試驗樣本增大時，最小平方推定法的計算變得相當繁瑣，因此除了 BLUE 之外，另外又有人發展出較為簡便的方法，稱為簡單線性無偏推定法(gross linear unbiased estimate)，簡稱 GLUE。相對之下，GLUE 法的變異數比 BLUE 的大。

4.2.4 圖解推定法

圖解推定法主要是在利用機率紙進行分析工作，這種推定方法不僅可以檢定機率分佈類型，進行參數推定，而且有關的可靠度指標也可以從圖上得到。機率紙是一種具備特殊刻度的座標紙，可以直接從市面購買使用。如果將機率紙的縱座標刻度繪製在普通座標紙上，則可利用此一改良過的座標紙解決試驗數據的統計分析問題。

機率紙的種類很多，在可靠度研究中應用較多的計有：常態機率紙、對數常態機率紙、指數機率紙、和韋伯機率紙等。不完全樣本壽命試驗，如截尾試驗、猝死(sudden death)壽命試驗(或稱分組最小法壽命試驗)、中止壽命試驗等，也可以在機率紙上進行可靠度分析。

進行機率紙分析的步驟說明如下：

(1). 整理數據：將試驗數據重新按由小到大的次序排列、編號，並將整理過的數據 x_i 記錄於表中。

(2). 估計累積機率分佈函數值：利用平均位階或中位位階估計每一個試驗數據 x_i 相對之機率分佈函數值 $F(x_i)$，並將估計得的機率分怖函數值 $\hat{F}(x_i)$ 記錄於表中。

(3). 描點：將每對數據 $\left[x_1,\hat{F}(x_1)\right],\left[x_2,\hat{F}(x_2)\right],\cdots$，依次描繪在假設機率分佈為已知的機率紙上。如果各數據點明顯不在一直線上，則認為該隨機變數 X 服從所選用機率紙的機率分佈的假設不成立，應該停止分析，另外作其它的判斷。如果各數

據點基本上落在一直線上，則接受服從機率紙之機率分佈，即使兩端有稍大的偏差亦然。

(4). 繪製分佈直線：

(5). 推定參數：

4.2.5 貝氏推定法

就基本觀念而言，貝式統計方法與傳統統計方法是有其差異處，在貝式統計方法中，一個機率或機率的描述，是以信賴程度的方式來表現出來，在古典統計中，機率係表示相對發生的可能性。進一步來看，在推定過程中，貝式方法假設參數為隨機變數，而古典方法中，它是各未知的固定值。

就工程規劃與設計而言，貝式統計方法提供了如下的優點：

(1). 它提供了一個將工程判斷(以機率的術語來表示)與觀測資料結合在一起的程序。

(2). 它有系統地結合隨機變數的不確定性與推定或推測過程中所產生的不確定性。

(3). 提供一個有系統地修正資料的正常程序。

貝氏參數推定法是應用貝氏理論進行參數推定的工作，這種推定方法與傳統推定不同的地方是從另外一種觀點來處理推定問題，此時機率分佈中的參數亦被假設為隨機變數，如此參數推定時的不確定性自然地摻入基本隨機變的的不確定性中。用這種統計方法時，根據直覺、經驗或間接的資料做主觀的判斷，有系統地配合實測的資料以獲得一均衡的推定值。當主觀的判斷容易做得正確時，貝式推定方法更能顯現其優點。

在應用貝氏理論來推定參數的事後分佈時，若參數的機率分佈能配合隨機變數的分佈而做適當的選擇時，則可獲得許多數學上的簡化。例如，隨機變數 X 為已知標準差σ的常態分佈，則參數μ的事前分佈亦成常態分佈，而μ的事後分佈亦成常態分佈；隨機變數 T 為已知尺度參數λ的指數分佈，則參數λ的事前分佈為參數為k'與λ'伽瑪分佈，而參數λ的事後分佈為參數為k''與λ''的伽瑪分佈。在分立型隨機變數的情況下，亦有類似的結果，例如，隨機變數為二項分佈，則參數p的事前分佈為參數q'和r'的貝他分佈，而p的事後分佈為參數為q''和r''的貝他分佈。

在貝式統計學中，此成對的分佈，稱為共軛對(conjugate pairs)或共軛分佈(conjugate distributions)。若所選擇的事前分佈為原有隨機變數的共軛分佈時，通常事後分佈的分佈種類與事前分佈相同，因此較容易獲得。例如前所列舉的常態－常態(normal-normal)分佈、指數-伽瑪分佈(exponential-gamman)、與二項-貝他(binomial-beta)分佈均是，其他的共軛分佈對亦可經由計算求得。

4.3 區間推定

以上討論的點推定是用有限樣本對無限群體的未知參數θ真值進行點推定$\hat{\theta}$，既然是推定，就未必是真值，難免會因樣本數不足而有所偏差，一般用$|\hat{\theta}-\theta|$表示此項誤差。因此，在進行參數推定時，不僅需要利用樣本對群體參數θ進行點推定(point estimation)，還要估算出一個範圍(區間)，並且希望知道在這個範圍內包含θ的信賴程度，這種形式的推定稱為區間推定(interval estimation)。

假設群體 X 分佈含有一個未知參數θ，若由樣本確定兩個統計量θ_L及θ_U，對於給定的顯著水準(significant level)α，$0<\alpha<1$，則滿足

$$P\{\theta_L \le \theta \le \theta_U\} = 1-\alpha$$

則稱隨機區間(θ_L,θ_U)是θ的$100(1-\alpha)\%$信賴區間(confidence limit)，θ_L與θ_U分別稱為θ的$100(1-\alpha)\%$信賴下限與信賴上限。顯著水準又稱誤差(error)，百分數$100(1-\alpha)\%$稱為信賴區間(θ_L,θ_U)的信賴水準(confidence level)，有時記為γ，$\gamma=1-\alpha$。

群體參數θ基本上是未知的，其真值為常數，其信賴下限θ_L與信賴上限θ_U為隨機變數，因此信賴區間(θ_L,θ_U)為一隨機區間。一般而言，上式不能讀作θ在(θ_L,θ_U)內的機率為$1-\alpha$，而應讀作隨機區間(θ_L,θ_U)包含θ的機率為$1-\alpha$。亦即，當樣不同樣本數不同時，根據其觀測值可計算得不同的區間，其中有些區間會包含θ而有些則不會包含θ。例如在樣本大小相同時，進行反復 100 次抽樣，每一組樣本觀測值都可確定一個區間(θ_L,θ_U)，在這 100 個區間中，包含θ真值的機率為$100(1-\alpha)\%$，不包含θ真值的機率為$100\alpha\%$。例如，顯著水準$\alpha=0.01$，說明 100 個估計區間中有 99 個區間包含θ的真值，僅約有 1 個區間不包含θ的真值。

同時具有信賴下限θ_L與信賴上限θ_U者，稱為雙邊信賴界限，相對應每邊的顯著水準α_L與α_U可以不相等，不過在實務上一般都假設兩者相等，亦即$\alpha_L=\alpha_U=\alpha/2$。若只有$\alpha_L$或$\alpha_U$，則稱為單邊信賴界限。顯著水準一般取$\alpha=0.1$、0.05、0.01。

5 參數檢定

參數檢定(parameter testing)與參數推定一樣，在研究可靠度問題時非常重要的數理統計技術之一。參數檢定主要是根據樣本數據，利用數理統計技術中的假設檢定(hypothesis testing)，判斷假設的群體參數是否為真確的。

5.1 假設檢定的基本概念

所謂假設檢定，乃是在實際上為了瞭解某群體的參數或特徵值，例如平均值、標準差是否相同，兩個群體是否相同，群體的分佈規律服從何種機率分佈函數等問題，先對群體作某種假設，然後通過取自群體的樣本觀測值，計算出樣本統計量，根據一個或多個統計量的性質對群體的性質作出推斷，檢定原先的假設是否正確，這種方法稱為假設檢定。

假設檢定的基本原理是從小機率的稀有事件著手，所謂稀有事件原理乃是指該事件在預定的一次試驗中幾乎是不可能發生的，亦即發生機率非常小，因此又稱為小機率事件。

5.2 假設檢定的步驟

進行假設檢定的一般步驟說明如下：

(1). 根據實際問題狀況提出假設

假設有原始假設與備選假設兩種，在數理統計原始假設又稱為虛無假設(null hypothesis)，乃是根據測試結果準備接受或拒絕的假設，用 H_0 表示；備選假設又稱為對立假設(alternate hypothesis)，為與原始假設不相容的假設，用 H_1 表示。例如假設檢定某群體的平均值 μ 是否等於給定的數值 μ_0，則原始假設為 $H_0 : \mu = \mu_0$，備選假設為 $H_1 : \mu \neq \mu_0$。又如檢定 μ 是否大於或等於 μ_0，則原始假設為 $H_0 : \mu \geq \mu_0$，備選假設為 $H_1 : \mu < \mu_0$。

(2). 選取檢定的顯著水準

檢定的顯著水準乃原始假設為正確時被拒絕或否定的最大機率值，記為 α，一般取 α 為 0.01 或 0.05，最常見者為假設 $\alpha = 0.05$，若 α 太大可能造成損失則取 $\alpha = 0.01$ 或更小的數值。

(3). 確定檢定用的統計量及其分佈

一般在應用假設檢定技術決定機率分佈參數時，統計量的機率分佈主要是根據抽樣分佈而定，常見者有 z 分佈、t 分佈、卡方分佈和 F 分佈，前二者主要用於檢定平均值，後二者用於檢定標準差。

(4). 確定否定域(又稱為拒絕域或棄卻域)

否定域是使統計量可能取值的範圍，如果根據樣本觀測數據計算得的統計量數值落在此範圍內，則拒絕原始假設。反之，統計量計算值落在此範圍以外的另一個範圍，則接受原始假設，接受原始假設的範圍稱為接受域。

(5). 計算與決策判斷

根據樣本觀測數據計算統計量，然後進行顯著性判斷，確定接受還是拒絕原始假設 H_0。

5.3 假設檢定的兩類錯誤

假設檢定是由有限的樣本數據推斷無限的群體的特性，其結論當然不能保證絕對沒有任何錯誤存在。基本上，這些錯誤有兩類：

(1). 當原始假設本身是正確的，因為樣本數據中存在著偶然的差異，使小機率事件發生在某一次樣本之中，以致於否定了正確的原始假設，導致判斷發生錯誤，這種錯誤稱為第一類錯誤。第一類錯誤的機率一般記為α，又稱為生產方風險，起源於假設檢定應用最廣是產品驗收時，亦即一批產品實際上是好的而被否定時，生產者將由於此一判斷錯誤使產品遭退回而蒙受損失。

(2). 當原始假設是不正確的，根據樣本觀測數據推斷接受了原始假設H_0，這種錯誤稱為第二類錯誤。發生第二類錯誤的機率記為β，又稱為使用方風險，因為它是按照抽樣結果推斷將一批實際上不符合要求的產品誤判為符合要求而予以接收，使用者因而蒙受損失。

基本上，希望兩種錯誤都越小越好，但是兩者之間存在著一定的關係，當樣本大小 n 一定時，α減小則β增大，反之β減小則α增大。因此在實務上，只能選擇適當的統計量和否定域，使這兩類錯誤達到一個較小的數值，而不能使它們任意小。要使α、β都達到事先指定的較小值，則必須增加樣本大小。在絕大多數的平均值與變異數的假設檢定中，α是給定的，β是不知道的，通常不用去計算β值，但樣本大小 n 最好不要小於 5，否則β就會增加。

6 機率分佈之適配度檢定

當獲得參數推定值後，為確保所選用的群體機率分佈能夠充分的描述問題的特性，有時必要對量測數據再作統計分析，利用機率分佈的適配度檢定法(goodness of fit)檢定數據是否來自假設機率分佈的群體，常用的檢定方法有卡方檢定法與 K-S 檢定法。

6.1 卡方檢定

設某一隨機變數有 n 個觀測樣本值，將這些樣本數值分成 k 個區間，設觀測值落在第 i 個區間內的的數量有o_i，而欲比較之假設分佈函數在同一區間內的頻率為e_i，則當觀測樣本數量$n \to \infty$時，下式會形成自由度為(k-1)之卡方分佈(χ^2)，

即：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

以此為基礎，若某一假設機率分佈會使$\chi^2 < \chi_\alpha^2(\nu)$時，則表示此一假設之理論分佈，在顯著水準(significance level)α下，為不可否定的假設，其中ν為自由度。若假設分佈之參數未知，需由觀測值推定時，本法仍能使，但要將自由度的數目減去未知參數之數目。

用卡方檢定來作假設分佈之檢定時，一般需要$k \ge 5$及$e_i \ge 5$，才會得到令人滿意的結果。

6.2 K-S檢定(Kolmogorov-Smirnov Test)

設某一隨機變數有 n 個觀測樣本值，將這些樣本數值由小到大按順序排列，由這些排列樣本值可得到階梯式的累積頻率曲線如下：

$$S_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \frac{k}{n}, & x_k \le x < x_{k+1}\\ 1, & x \ge x_n\end{cases}$$

上式中，$(x_1, x_2, ..., x_n)$為由小而大衣序排列的樣本值，將$S_n(x)$函數與假設之機率分佈函數$F(x)$繪成曲線，設$S_n(x)$與$F(x)$函數的最大誤差為D_{max}，則

$$D_{max}=\max\{|F(x)-S_n(x)|\}$$

K-S檢定主要就是在顯著水準(significance level)α下，比較D_{max}與臨界值$D_\alpha(n)$，當某一假設機率分佈會使$D_{max}<D_\alpha(n)$時，則表示此一假設之理論分佈，在顯著水準α下，為不可否定的假設。臨界值$D_\alpha(n)$則可由表1查得其數值。

表 1: K-S檢定臨界值 $D_\alpha(n)$ 表

n ＼ α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500
2	0.68377	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.78456	0.82900
4	0.49265	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.57741	0.61661
7	0.38148	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179
9	0.33910	0.38746	0.43001	0.47960	0.51332
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.45662	0.48893
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762
15	0.26588	0.30397	0.33760	0.37713	0.40420
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086
18	0.24360	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062
19	0.23735	0.27136	0.30143	0.33685	0.36117
20	0.23156	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241
21	0.22617	0.25858	0.28724	0.32104	0.34427
22	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
23	0.21645	0.24746	0.27490	0.30728	0.32954
24	0.21205	0.24242	0.26931	0.30104	0.32286
25	0.20790	0.23768	0.26404	0.29516	0.31657
26	0.20399	0.23320	0.25907	0.28962	0.31064
27	0.20030	0.22898	0.25438	0.28438	0.30502
28	0.19680	0.22497	0.24993	0.27942	0.29971
29	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
30	0.19032	0.21756	0.24170	0.27023	0.28987
31	0.18732	0.21412	0.23788	0.26596	0.28530
32	0.18445	0.21085	0.23424	0.26189	0.28094
33	0.18171	0.20771	0.23076	0.25801	0.27677
34	0.17909	0.20472	0.22743	0.25429	0.27279
35	0.17659	0.20185	0.22425	0.25073	0.26897
36	0.17418	0.19910	0.22119	0.24732	0.26532
37	0.17188	0.19646	0.21820	0.24404	0.26180
38	0.16966	0.19392	0.21544	0.24089	0.25843
39	0.16753	0.19148	0.21273	0.23786	0.25518
40	0.16547	0.18913	0.21012	0.23494	0.25205
41	0.16349	0.18687	0.20760	0.23213	0.24904
42	0.16158	0.18468	0.20517	0.22941	0.24613
43	0.15974	0.18257	0.20283	0.22679	0.24332
44	0.15796	0.18053	0.20056	0.22426	0.24060
45	0.15623	0.17856	0.19837	0.22181	0.23798
46	0.15457	0.17665	0.19625	0.21944	0.23544
47	0.15295	0.17481	0.19420	0.21715	0.23298
48	0.15139	0.17302	0.19221	0.21493	0.23059
49	0.14987	0.17128	0.19028	0.21277	0.22828
50	0.14840	0.16959	0.18841	0.21068	0.22604
55	0.14164	0.16186	0.17981	0.20107	0.21574
60	0.13573	0.15511	0.17231	0.19267	0.20673
65	0.13052	0.14913	0.16567	0.18525	0.19877
70	0.12586	0.14381	0.15975	0.l7863	0.19167
75	0.12167	0.13901	0.15442	0.17268	0.18528