第一章 可 靠 性 概 论

内 容 提 要

§1-3 常用失效分布

一、指数分布 ——
1. 失效概率密度函数 $f(t)$
2. 累积失效概率函数 $F(t)$
3. 可靠度函数 $R(t)$
4. 失效率函数 $\lambda(t)$
5. 平均寿命 θ
6. 可靠寿命 T_r
7. 中位寿命 $T_{0.5}$
8. 特征寿命 $T_{e^{-1}}$

二、威布尔分布

三、正态分布

四、对数正态分布

习 题 一 答 案

§1-3　常用失效分布

产品的失效分布 是指其失效概率密度函数或累积失效概率函数，它与可靠性特征量有关密切的关系。

如已知产品的失效分布函数，则可求出可靠度函数、失效率函数和寿命特征量。

即使不知道具体的分布函数，但如果已知失效分布的类型，也可以通过对分布的参数估计求得某些可靠性特征量的估计值。

因此，在可靠性理论中，研究产品的失效分布类型是一个十分重要的问题。

一、指数分布

在可靠性理论中，指数分布是最基本、最常用的分布，适合于失效率为常数的情况。

指数分布不但在电子元器件偶然失效期普遍使用，而且在复杂系统和整机方面以及机械技术的可靠性领域也得到使用。

指数分布一般记为 $T \sim E(\lambda)$。

1.失效概率密度函数 f（t）

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0) \qquad \text{（1-17）}$$

式中 λ — 指数分布的失效率，

为一常数。

指数分布的失效概率密度函数$f（t）$的图形如图1—10所示。

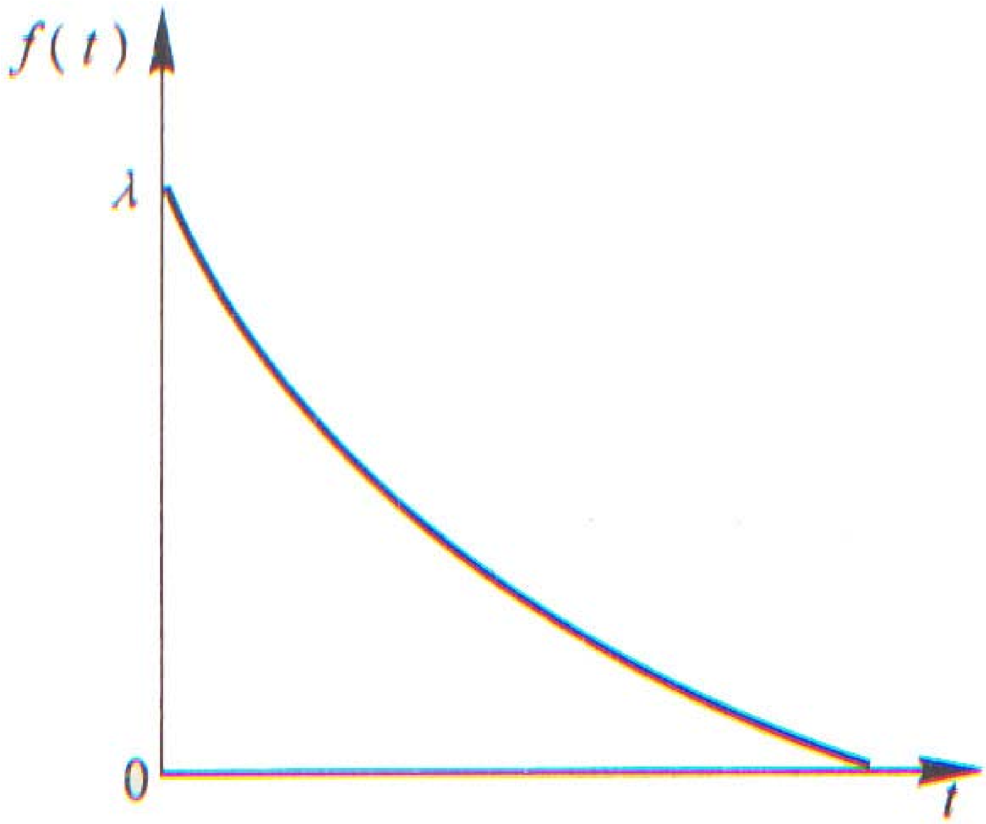


图 1—10　指数分布的失效概率密度函数

2. 累积失效概率函数 F（t）

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$$

$$=\int_{0}^{t}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda t}(t\geq 0)$$ （1—18）

累积失效概率函数F（t）的图形如图1—11所示。

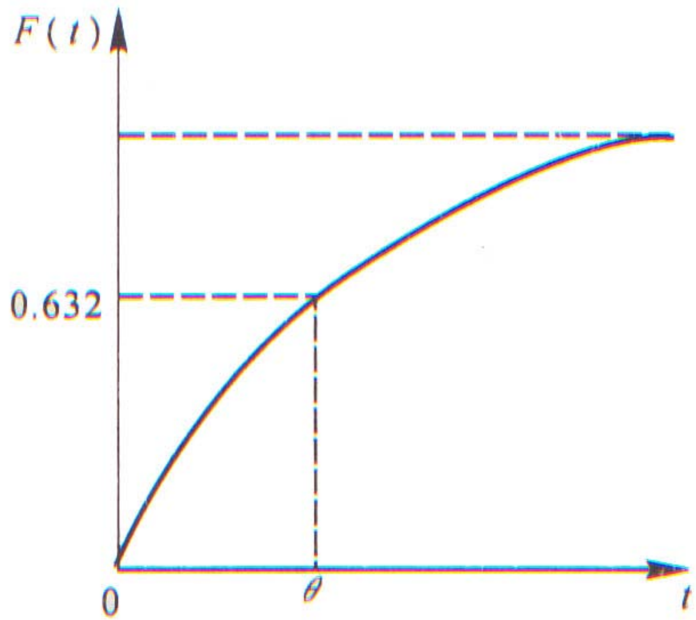


图 1—11 指数分布的累积失效概率函数

3. 可靠度函数R（t）

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} (t \geq 0) \quad （1—19）$$

可靠度函数R（t）的图形如图1-12所示。

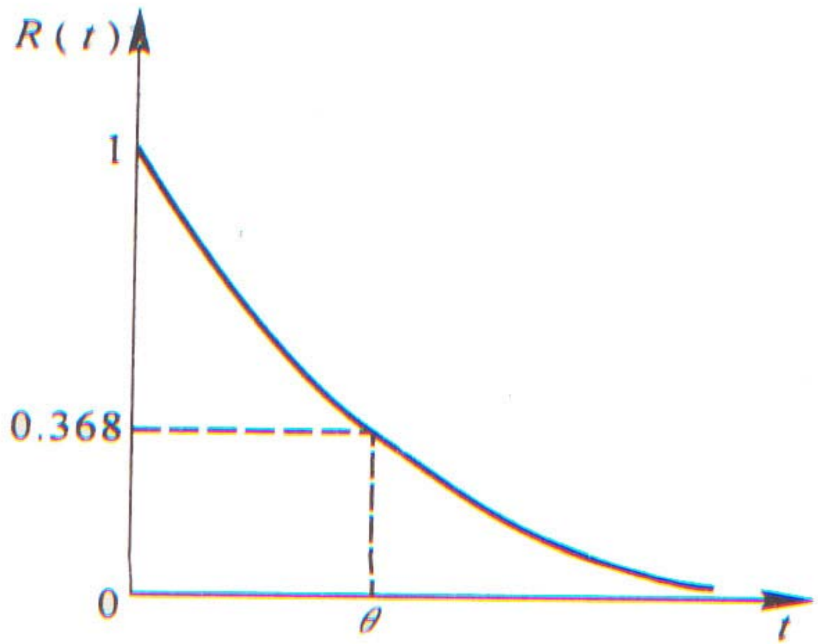


图 1—12 指数分布的可靠度函数

4.失效率函数 $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \lambda = \text{常数} \qquad (1-20)$$

失效率函数的图形如图1－13所示。

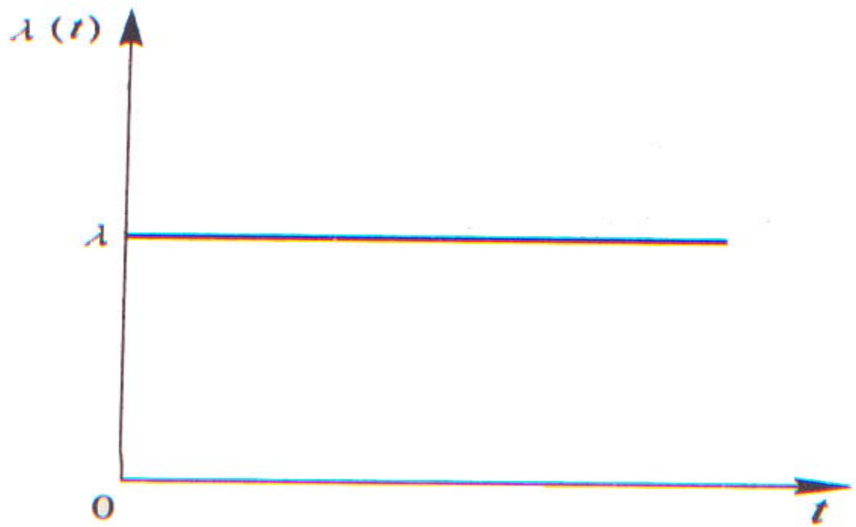


图 1—13　指数分布的失效率函数

5. 平均寿命 θ（MTTF或MTBF）

$$\theta = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} \qquad (1\text{—}21)$$

因此，当产品寿命服从指数分布时，其平均寿命 θ 与失效率 λ 互为倒数。

6. 可靠寿命 T_r

给定可靠度 $\boldsymbol{r}$ 时，根据式（1—19）可得：

$$R(T_r)=e^{-\lambda T_r}=r$$

将上式两边取自然对数，可得：

$$-\lambda T_r=\ln r$$

所以 $$T_r=-\frac{1}{\lambda}\ln r$$ （1-22）

7. 中位寿命 $T_{0.5}$

将 $r = 0.5$ 代入式（1—22）可得：

$$T_{0.5} = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.5 = 0.693\frac{1}{\lambda} \qquad (1\text{-}23)$$

8. 特征寿命 T_{e-1}

$r = e^{-1}$ 代入式（1−22）

可得：$$\boxed{T_{e^{-1}} = -\frac{1}{\lambda}\ln e^{-1} = \frac{1}{\lambda}}$$

指数分布有一个**重要特性**，即产品工作了t_0时间后，它再工作 t 小时的可靠度与已工作过的时间 t_0 无关（**无记忆性**），而**只与时间 t 的长短有关**，证明见讲义。

二、威布尔分布

威布尔分布在可靠性理论中是适用范围较广的一种分布。

它能全面地描述浴盆失效率曲线的各个阶段。当威布尔分布中的参数不同时，它可以蜕化为指数分布、瑞利分布和正态分布。

大量实践说明，凡是因为某一局部失效或故障所引起的全局机能停止运行的元件、器件、设备、系统等的寿命服从威布尔分布；特别在研究金属材料的疲劳寿命，如疲劳失效、轴承失效都服从威布尔分布，简记：$T \sim W(m, \eta, \delta)$ 。

1. 失效概率密度函数 $f(t)$

$$f(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\delta}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-\delta}{\eta}\right)^{m}} \quad (\delta\le t; m,\eta>0)$$

（1-24）

式中 m——形状参数；

η——尺度参数；

δ——位置参数。

$f(t)$ 的图形如图1—14所示。

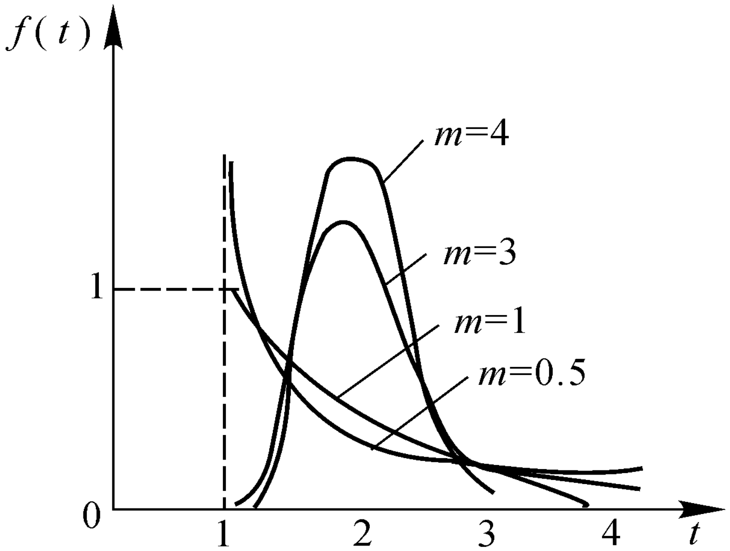


图1−14(a)$\eta=1, \delta=1$时
不同m(形状)的$f(t)$

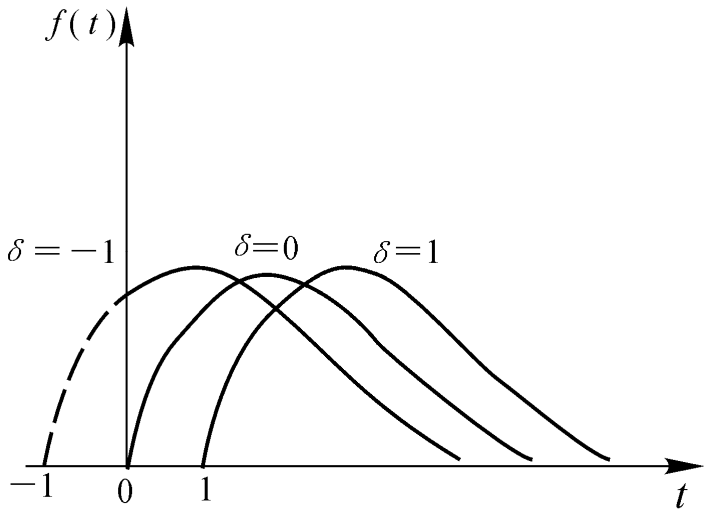


图1−14(b)$m=2, \eta=1$时
不同δ(位置)的$f(t)$

$f(t)$ 的图形如图1—14所示。

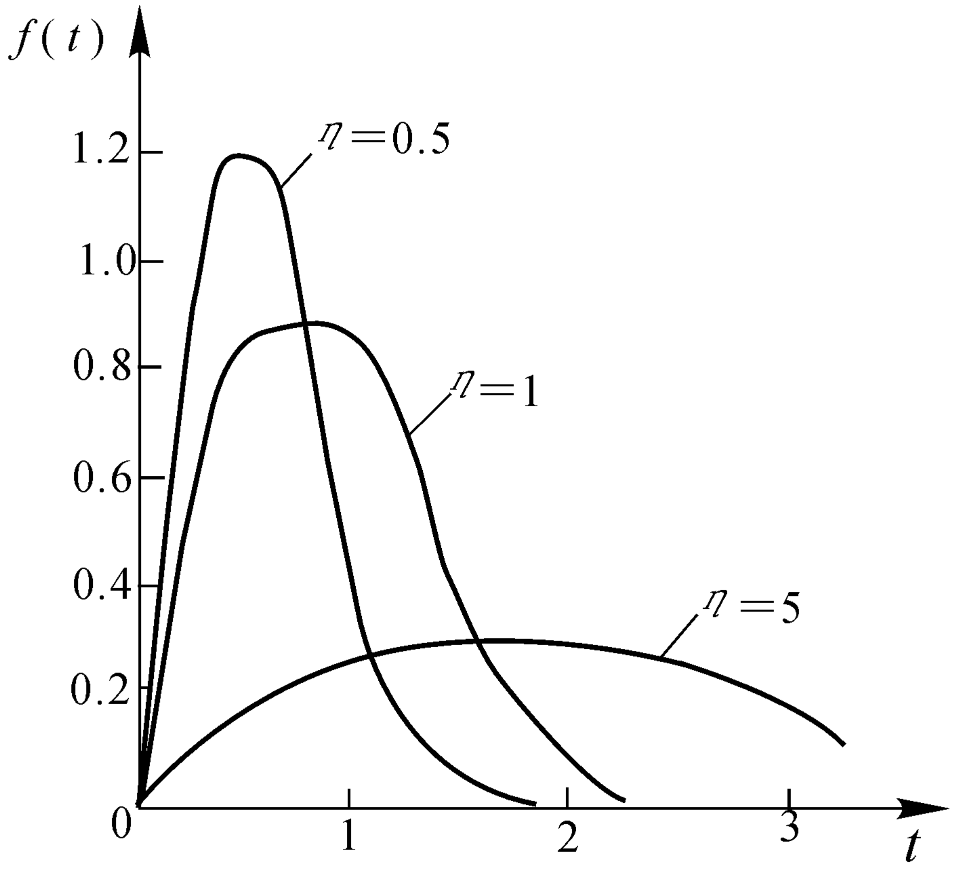


图1−14(c)$m=2,\delta=0$时

不同η(尺度)的$f(t)$

2.累积失效概率函数 $F(t)$

$$F(t)=1-e^{-\frac{(t-\delta)^m}{\eta}} \quad (\delta \le t; m,\eta>0) \qquad (1\text{-}25)$$

$F(t)$ 的图形如图1—15所示。

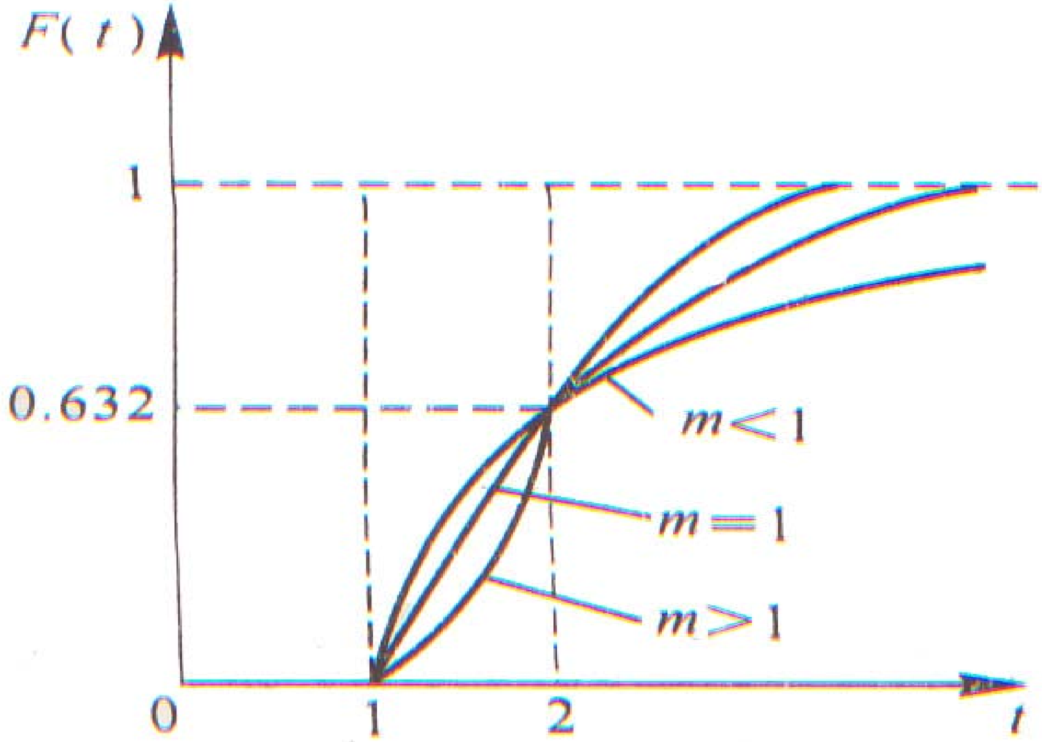


图 1—15 $\eta=1$、$\delta=1$ 时不同 m 值的累积失效概率函数

3. 可靠度函数 R（t）

$$R(t)=e^{-\frac{(t-\delta)^m}{\eta}} \quad (\delta \le t; m,\eta > 0) \qquad \text{（1-26）}$$

R（t）的图形如图1–16所示。

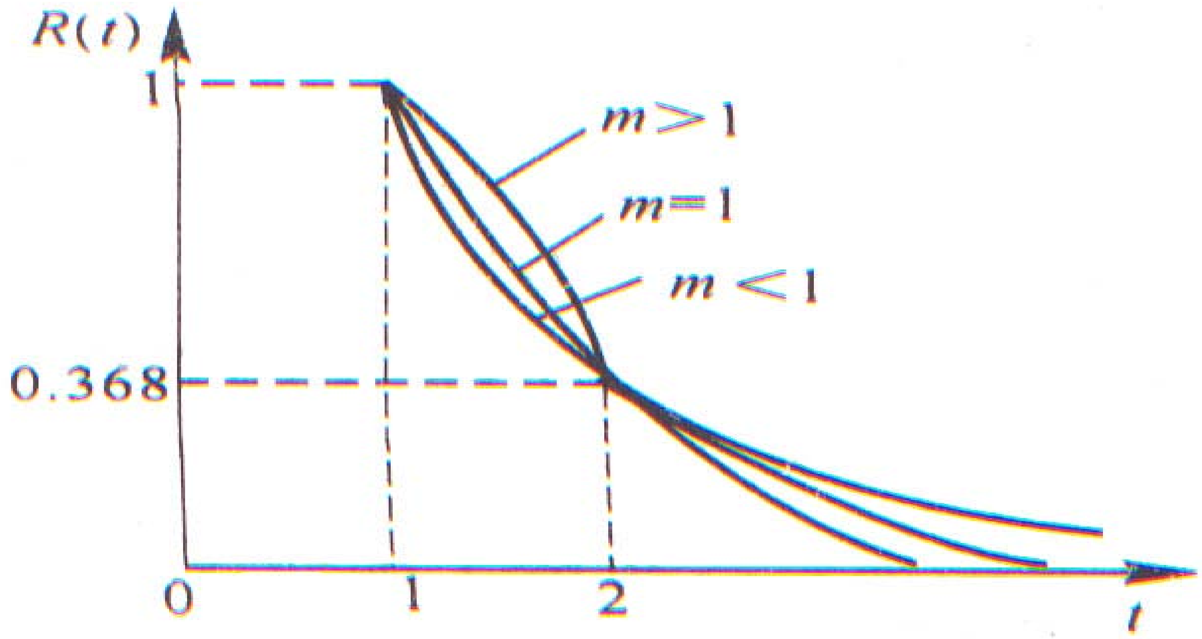


图 1—16　$\eta=1$、$\delta=1$ 时不同 m 值的可靠度函数

4. 失效率函数$\lambda(t)$

$$\lambda(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\delta}{\eta}\right)^{m-1} \quad (\delta \le t; m,\eta>0) \qquad (1\text{-}27)$$

$\lambda(t)$ 的图形如图1−17所示。

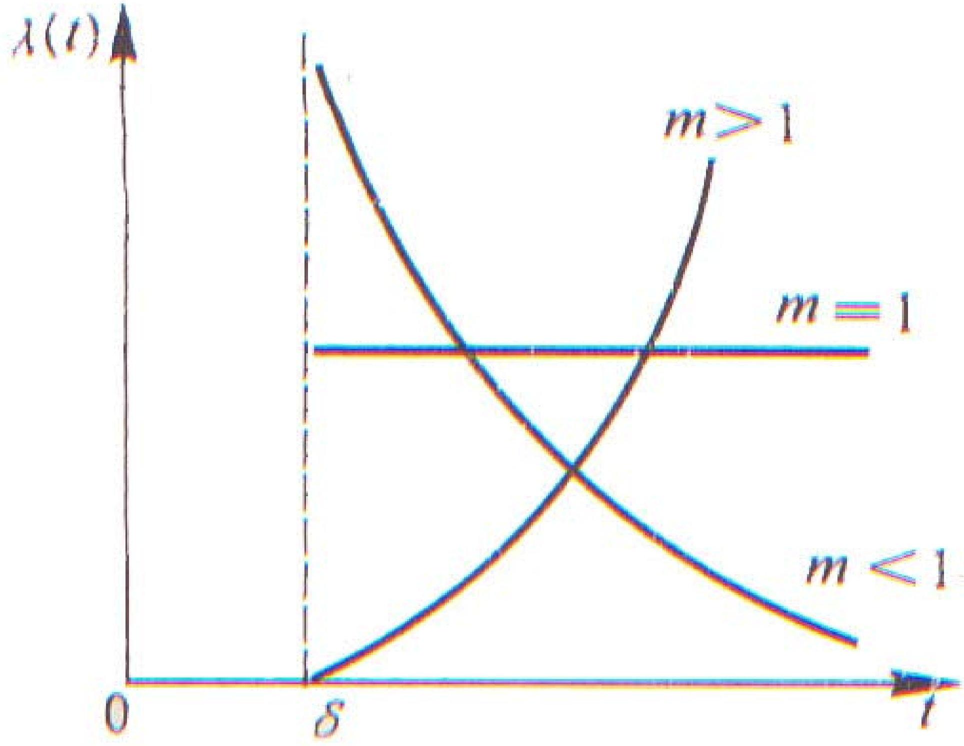


图1−17 δ≠0时不同m值的失效率函数

5 .三个参数（m、 η、 δ）的意义

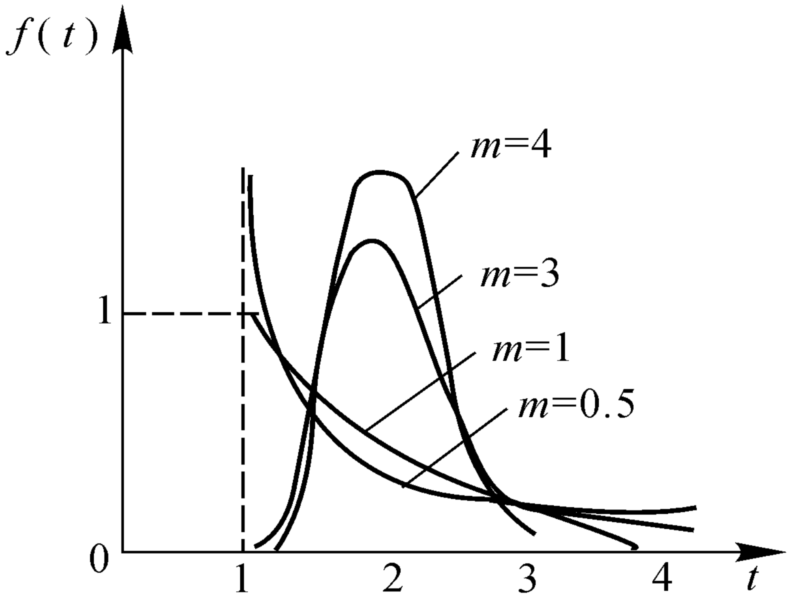
（1）形状参数 m

威布尔分布的失效概率密度曲线、累积失效概率曲线、可靠度曲线以及失效率曲线的形状都随 m 值不同而不同，所以把 m 称为形状参数。

各分布曲线的形状如图1—14～1—17所示。

从图1-14～图1-17中可以看出：

图1−14(a)$\eta=1,\delta=1$时
不同m(形状)的$f(t)$



从上图可以看出：

当m<1时，$f(t)$ 曲线随时间单调下降；

当m=1时，$f(t)$ 曲线为指数曲线；

当m>1时，$f(t)$ 曲线随时间增加出现峰值而后下降；

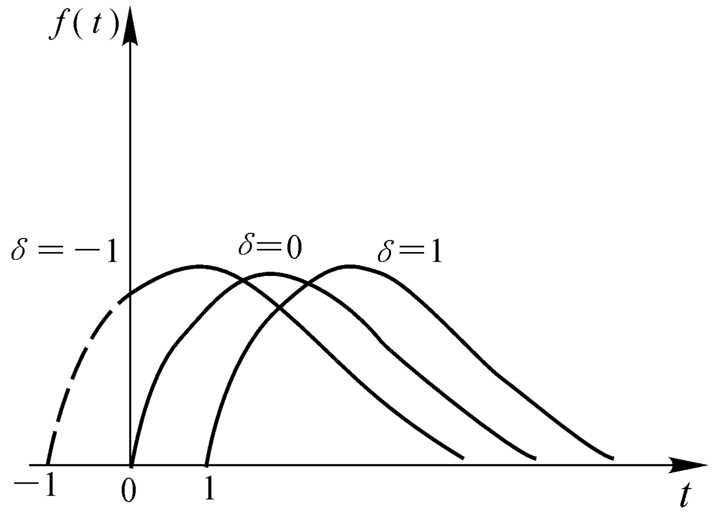
当m=3时，$f(t)$ 曲线已接近正态分布。通常m =3~4 即可当做正态分布。

（2）位置参数 δ

位置参数 δ 决定了分布的出发点。当m、η相同，δ不同时，其失效概率密度曲线是完全相同的，所不同的只是曲线的起始位置有所变动，如图1-14（b）所示。

图1-14(b) $m=2, \eta=1$时

不同δ(位置)的$f(t)$



从图1-14（b）可以看出，当 $\delta<0$ 时，产品开始工作时就已失效了，即这些元件在贮存期已失效，曲线由 $\delta=0$ 时的位置向左平移 $|\delta|$ 的距离。

当 $\delta=0$时，$f(t)$曲线为二参数威布尔分布。

当 $\delta>0$时，表示这些元件在起始时间 δ 内不会失效，$f(t)$ 曲线由 $\delta=0$时的位置向右平移 $|\delta|$的距离。此时，可将 δ称为最小保证寿命。

（3）尺度参数 η

通常将 η 称为真尺度参数，当 m 值及 δ 值固定不变。

η 值不同时威尔布分布的失效概率密度曲线的高度及宽度均不相同。

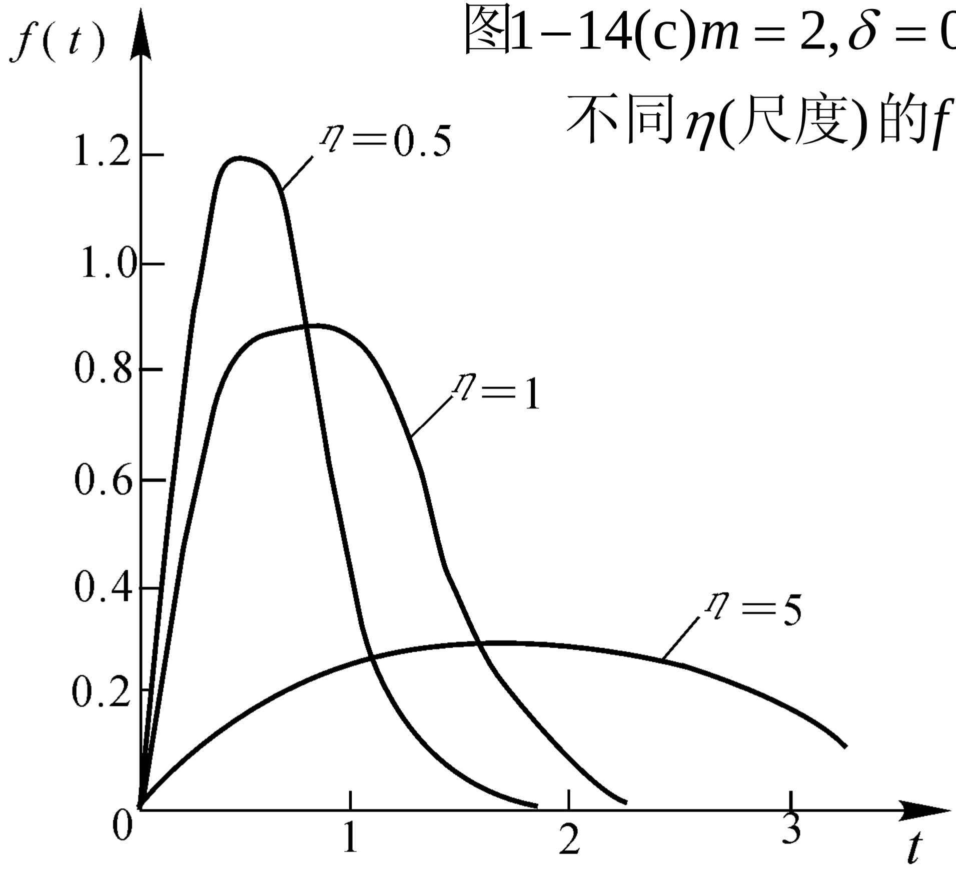


图1−14(c)$m=2,\delta=0$时不同η(尺度)的$f(t)$

由图（c）可见，$m=2$、$\delta=0$ 时不同 η 值的失效概率密度曲线。当 η 值增大时，$f(t)$ 的高度变小而宽度变大。故把 η 称为尺度参数。

三、正态分

正态分布在数理统计学中是一个最基本的分布，在可靠性技术中也经常用到它，如材料强度、磨损寿命、疲劳失效、同一批晶体管放大倍数的波动或寿命波动等等都可看作或近似看作正态分布。

在电子元器件可靠性的计算中，正态分布主要应用于元件耗损和工作时间延长而引起的失效分布，用来预测或估计可靠度有足够的精确性。

由概率论知，只要某个随机变量是由大量相互独立、微小的随机因素的总和所构成，而且每一个随机因素对总和的影响都均匀地微小，那么，就可断定这个随机变量必近似地服从正态分布。

简记为：

$$T \sim N(\mu、\sigma^2)$$

1. 失效概率密度函数 $f(t)$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad （1—28）$$

式中 μ —随机变量的均值；

σ —随机变量的标准差。

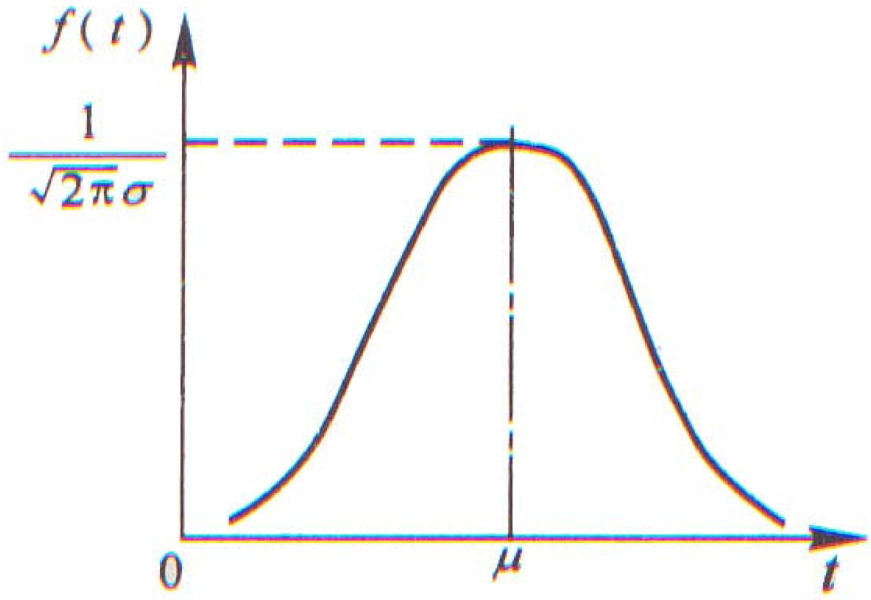


图 1—18　正态分布的失效概率密度函数

2. 累积失效概率函数 F（t）

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (1—29)$$

F（t）的图形如图1−19所示

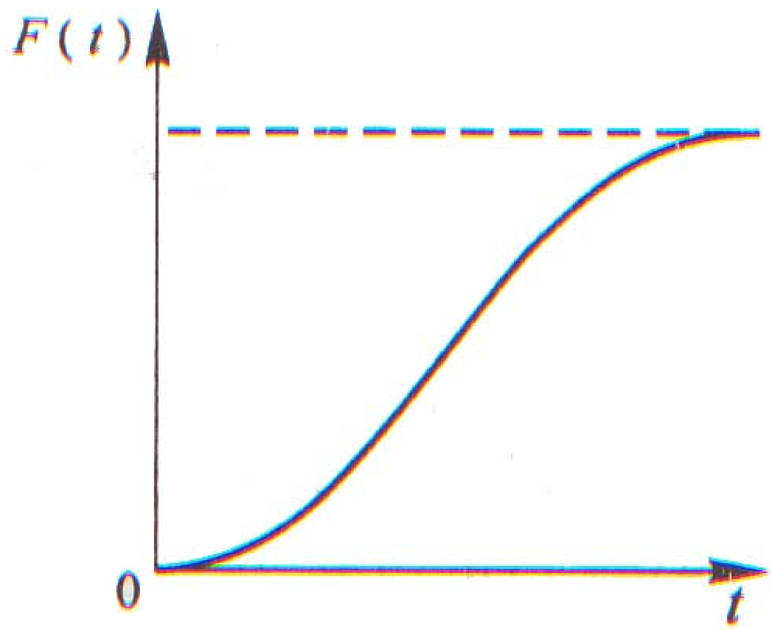


图 1—19　正态分布的累积失效概率函数

若令 $z = \dfrac{t - \mu}{\sigma}$ 代入（1—29）式，

则可以得到**标准化正态分布**的累积失效概率函数。

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

（1—30）

3. 可靠度函数 *R*（*t*）

$$R(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_t^{\infty}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad (1\text{-}31)$$

R（*t*）的图形如图1–20所示。

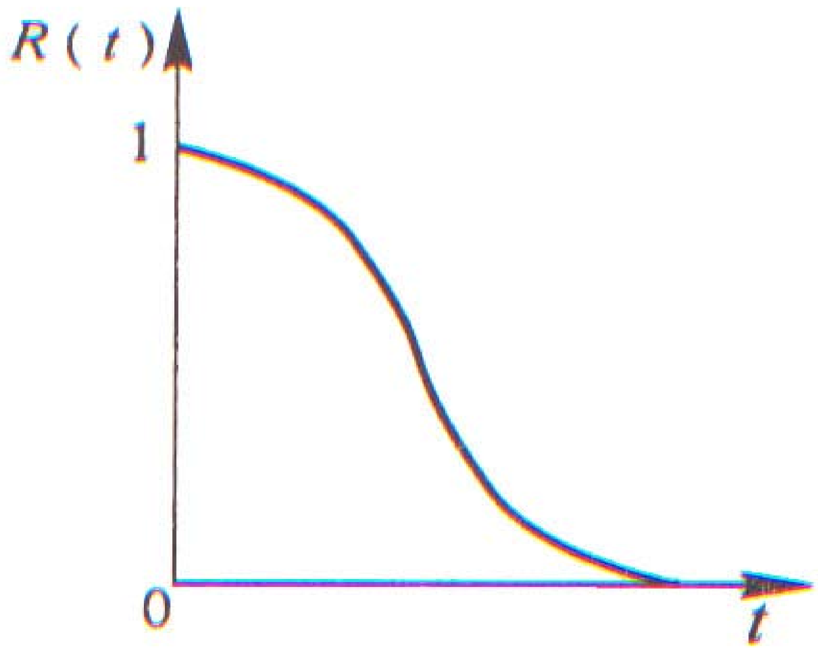


图 1—20 正态分布的可靠度函数

4. 失效率函数 $\lambda(t)$

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_t^{\infty}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad (1\text{-}32)$$

$\lambda(t)$ 的图形如图1−21所示。

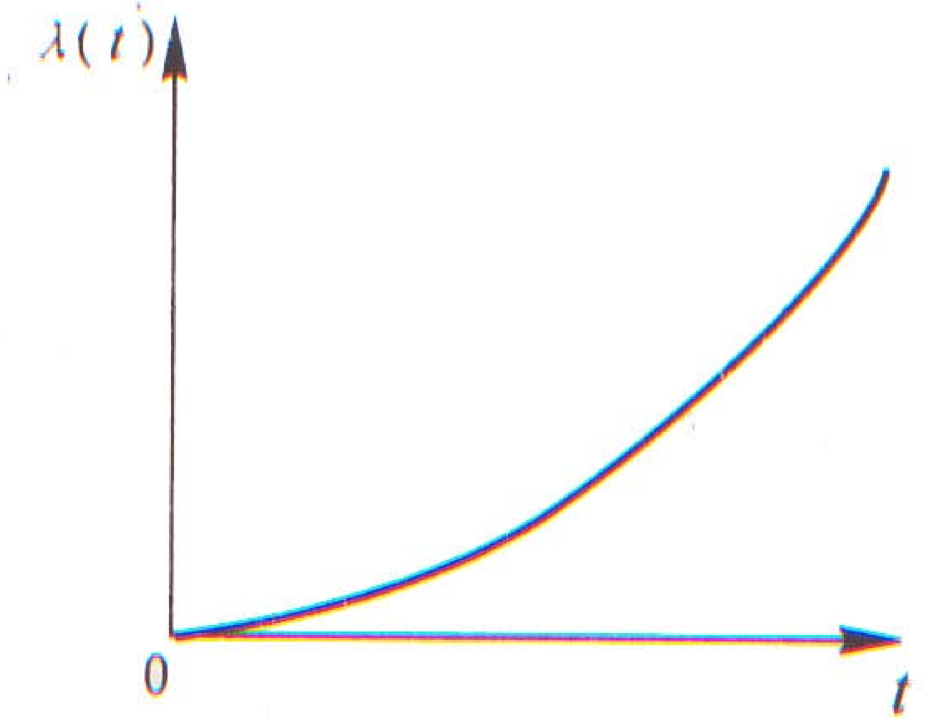


图 1—21 正态分布的失效率函数

四、对数正态分布

在可靠性理论中，对数正态分布用于由裂痕扩展而引起的失效分布。如疲劳、腐蚀失效。此外，也用于恒应力加速寿命试验后对样品失效时间进行了统计分析。

随机变量 t 的自然对数 $\ln t$ 服从均值为 μ 和标准差多 σ 的正态分布，称为对数正态分布。这里 μ 和 σ 不是随机变量 t 的均值和标差差，而是 $\ln t$ 的均值和标准差。

1.失效概率密度函数 $f(t)$

$$f(t)=\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1\text{-}33)$$

$f(t)$ 失效概率密度函数图形如图1-22所示。

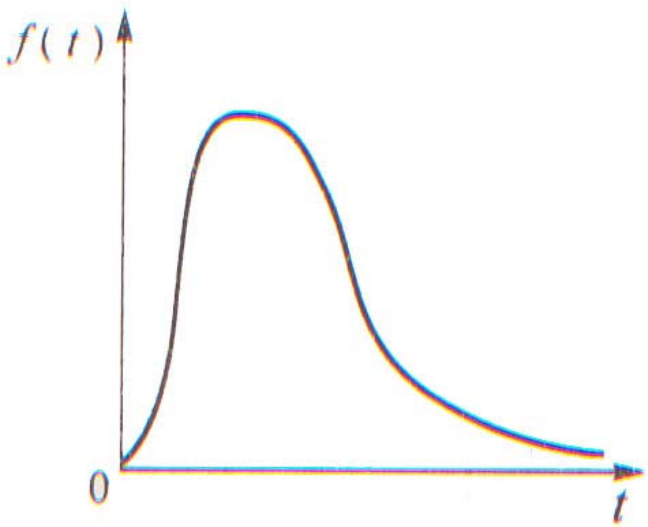


图 1—22　对数正态分布概率密度函数

2.累积失效概率函数 $F(t)$

$$F(t)=\int_0^t \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1\text{-}34)$$

F（t）的图形如图1-23所示。

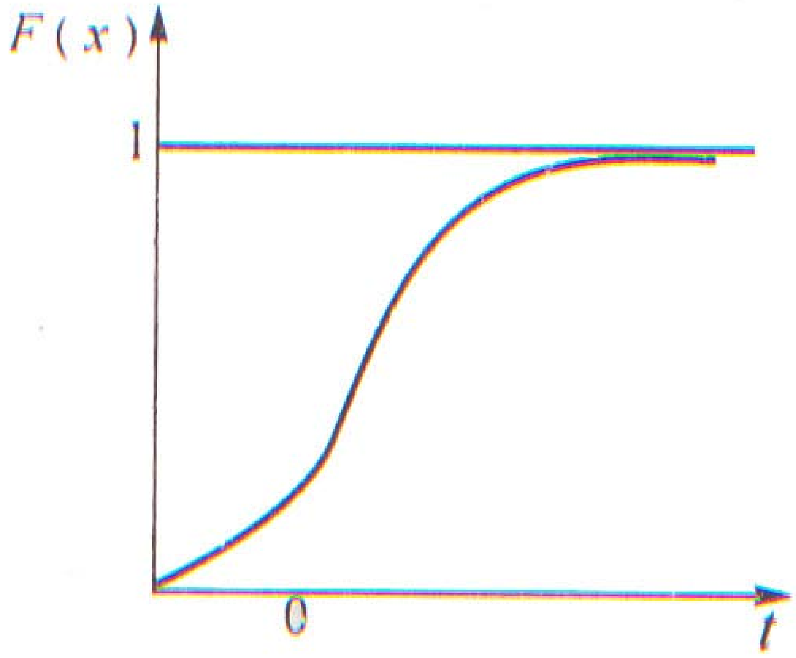


图 1—23　对数正态分布累积失效概率函数

3.可靠度函数 $R(t)$

$$R(t)=\int_t^{\infty}\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \tag{1-35}$$

R（t）的图形如图1−24所示。

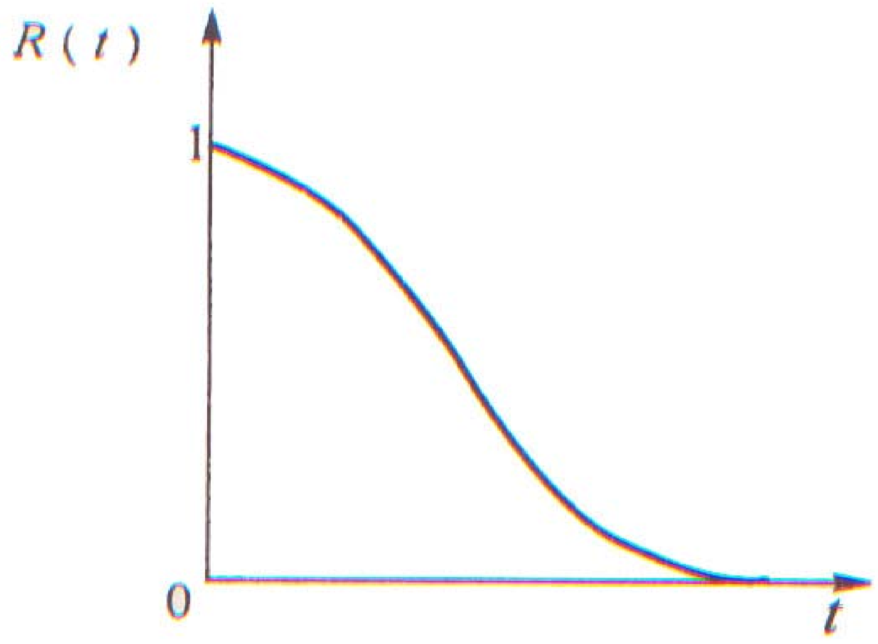


图 1—24　对数正态分布可靠度函数

4.失效率函 $\lambda(t)$

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\frac{1}{t}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^{\infty}\frac{1}{t}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt} \qquad (1\text{-}36)$$

$\lambda(t)$ 的图形如图1-25所示。

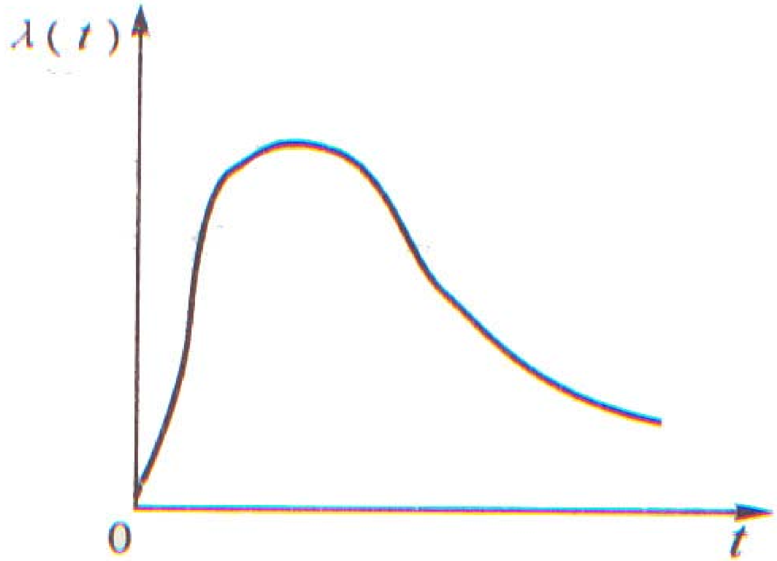


图 1—25 对数正态分布失效率函数

习 题 一　　答　案

1. $t = 10536.1\ \text{h}$；

2. $$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < \mu \\ \lambda e^{-\lambda(t-\mu)} & t \geqslant \mu \end{cases}$$

$\text{MTTF} = 1/\ \lambda + \mu$

3. $$R(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ e^{-\frac{t^2}{2}} & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geqslant 0 \end{cases}$$

4. （1）由式（1-4）得：

$$R(t)=1-F(t)=e^{-(\frac{t}{\eta})^m} \qquad (t \geq 0\,, \eta > 0)$$

（2）由式（1-6）得：

$$f(t)=F'(t)=-m(\frac{t}{\eta})e^{-(\frac{t}{\eta})^m}$$

（3）由式（1-10）得：

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}$$

5. $\hat{R}(2000) = 0.975$ $\hat{F}(2000) = 0.025$

$\hat{R}(4000) = 0.95$ $\hat{F}(4000) = 0.05$

$\hat{R}(4000 \cdots 8000) = 0.895$

$\hat{F}(4000 \cdots 8000) = 0.105$

6. $\hat{f}(20) = 1.33\,\%/\mathrm{h}$ $\hat{\lambda}(20) = 2\,\%/\mathrm{h}$

7. $\hat{\lambda} = 3.9683 \times 10^{-5}\ /\ \mathrm{h}$ $\hat{R}(4000) = 0.853$

$t = 17467.1\ \mathrm{h}$