

# 第二章 系统可靠性模型

## 内容提要

### § 2—3 串联系统的可靠性模型

- 一、定义和特点
- 二、可靠性框图
- 三、数学模型
- 四、提高串联系统可靠性的措施

### § 2—4 并联系统的可靠性模型

- 一、定义和特点
- 二、可靠性框图
- 三、数学模型
- 四、提高并联系统可靠性的措施

### § 2-5 混联系统的可靠性模型

- 一、串并联系统(附加单元系统)
- 二、并串联系统(附加通路系统)
- 三、较复杂的混联系统

## § 2—3 串联系统的可靠性模型

### 一、定义和特点



#### 1. 定义:

一个系统由  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n$  个单元组成, 只有当**每个单元都正常工作时, 系统才能正常工作**; (或其中**任何一个单元失效时系统就失效**)。该系统称串联系统。

#### 2. 特点

(1) 工程上最常用 (尤其民品);

(2) 
$$R_S \leq \min\{R_i\} \quad 0 < R_i < 1$$

## 二、可靠性框图 (见图2—15所示)

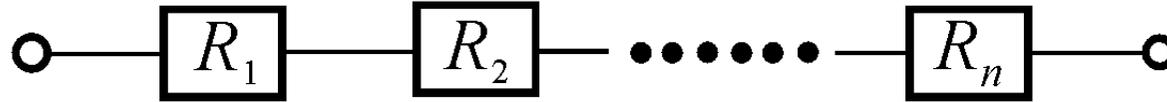


图2-15串联系统的可靠性框图

## 三、数学模型

### 1. 可靠度

在串联系统中，设各单元相互独立，

其 $R(t)$

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (2-9)$$

若各单元的寿命分布为**指数分布**时

即  $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$

则  $R_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t} = e^{-\lambda_s t}$  (2—10)

其中  $\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

可见：**单元寿命分布为指数分布，系统的寿命分布也为指数分布；**

## 2. 系统失效率 $\lambda_s(t)$

$$\lambda_s(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)$$

$\lambda_s(t)$  为各单元该时刻失效率  $\lambda_i(t)$  之和。

## 3. 平均寿命 MTBF

$$E(T)(\theta, \text{MTTF}, \text{MTBF}) = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

(2-11)

## 四、提高串联系统可靠性的措施

1. 提高各单元的可靠性；
2. 减少串联单元数；
3. 等效地缩短任务时间。

例 2-3 一台由五类元器件组成的串联系计算机(见教材)。元器件的寿命均为指数分布, 其数据如表2-3所示。

求  $R(t)$ ,  $t=10\text{h}$  的  $R(t)$ 、 $\lambda_s$ 、 $\text{MTBF} = ?$

表 2-3 计算机的元器件

种类	1	2	3	4	5
失效率 $\lambda_i / \text{h}^{-1}$	$10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$2 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$
元器件个数 $n_i$	$10^4$	$10^3$	$10^2$	$10$	$2$

解：根据式(2-10)和式(2-11)可得：

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^5 n_i \lambda_i = 10^{-7} \times 10^4 + \cdots + 10^{-4} \times 2 = 0.002 \text{h}^{-1}$$

$$R(t) = e^{-\sum_{i=1}^5 n_i \lambda_i t} = e^{-0.002t}$$

$$\begin{aligned} R(10) &= e^{-0.002 \times 10} \\ &= e^{-0.02} = 0.98 \end{aligned}$$

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{0.002 \text{ h}^{-1}} = 500 \text{ h}$$

## § 2—4 并联系统的可靠性模型

### 一. 定义和特点

#### 1. 定义:

一个系统由  $n$  个单元  $A_1, A_2, \dots, A_n$  组成, 如只要有一个单元工作, 系统就能工作, 或者说只有当所有单元都失效时系统才失效, 该系统为并联系统。

#### 2. 特点:

(1) 是一种用低可靠性单元形成的较高可靠性的系统 (即一种冗余系统);

$$(2) R_S \geq \max \{R_i\}。$$

二、可靠性框图, 见图2—16所示。

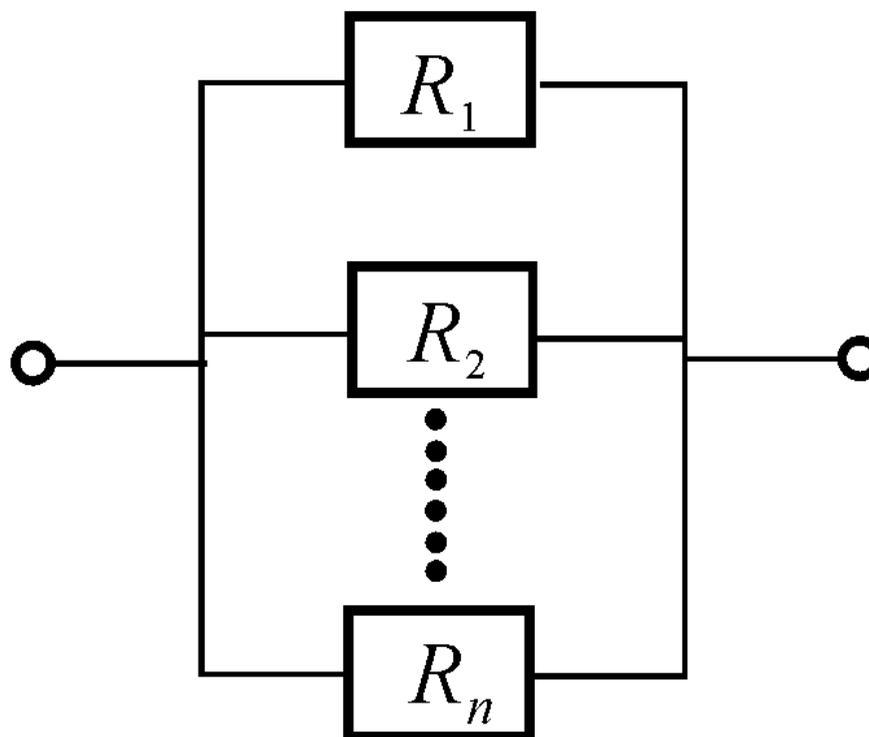


图2-16 并联系统的可靠性框图

### 三、数学模型

#### 1. 可靠度

假设各单元相互独立，则有：

$$\because F_s(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t)$$

$$\begin{aligned} R_s(t) &= 1 - F_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)] \end{aligned} \quad (2-13)$$

若各单元的寿命分布都是**指数分布**，即单元可靠度为：

$$R_i = e^{-\lambda_i t}$$

则有

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - e^{-\lambda_i t}] \quad (2-14)$$

可见此系统的寿命分布已**不是指数分布**。

## 2. 平均寿命

$$\text{MTBF} = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

(2-15)

当  $n = 2$  时

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\lambda_S(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}$$

当  $n$  个单元  $\lambda$  都相等时的各参数的计算式为:

$$R_s(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad (2-16)$$

$$\lambda_s(t) = \frac{n\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})^n}$$

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \cdots + \frac{1}{n\lambda} \quad (2-17)$$

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} R_s(t) &= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2 \\ &= 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

$$\lambda_s(t) = \frac{2\lambda(1 - e^{-\lambda t})}{2 - e^{-\lambda t}}$$

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2}\theta$$

$$n = 3$$

$$\begin{aligned} R_s(t) &= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^3 \\ &= 3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t} \end{aligned}$$

$$\lambda_s(t) = \frac{3\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^2}{1 - (1 - e^{-\lambda t})^3}$$

$$\begin{aligned} \text{MTBF} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda} = \frac{11}{6\lambda} \\ &= \frac{11}{6}\theta \end{aligned}$$

## 四、提高并联系统可靠性的措施

- 1.提高单元的可靠性；
- 2.增加并联单元的数目，但耗费将大大增加；
- 3.等效地缩短任务时间。



例 2-4 某液压系统中，其结构如图2-17所示。

失效模式：滤网堵塞或破损。  $\lambda_1 = 5 \times 10^{-5} \text{h}^{-1}$

$\lambda_2 = 1 \times 10^{-5} \text{h}^{-1}$  和工作时间  $t = 10^3 \text{h}$ 。

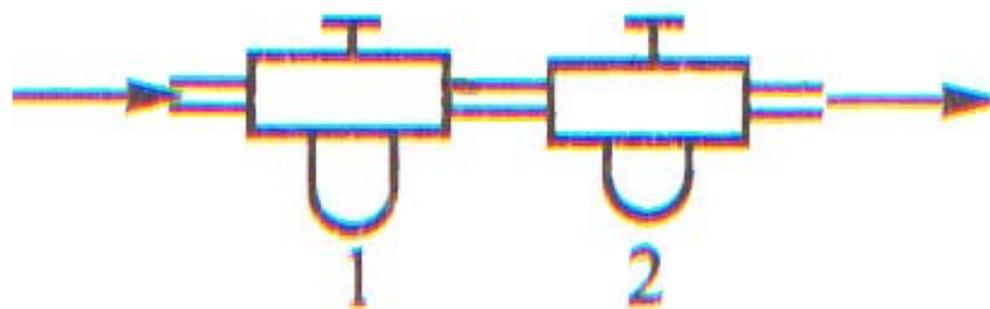


图 2—17 滤油器的结构图

- 求：(1) 滤网堵塞时的可靠度、失效率、平均寿命；
- (2) 滤网破损时的可靠度、失效率、平均寿命。

解：(1) 滤网堵塞时系统的可靠性框图2-18,



图 2—18 滤网堵塞失效时的可靠性框图

由于  $\lambda = \text{常数}$ ，所以其为指数分布。

故有：

$$\begin{aligned}\lambda_s &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 5 \times 10^{-5} + 1 \times 10^{-5} \\ &= 6 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_S(1000) &= e^{-\lambda_s t} = e^{-6 \times 10^{-5} \times 1000} \\ &= e^{-0.06} = 0.94176\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{MTBF} &= \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{6 \times 10^{-5}} \\ &= 16667 \text{ h}\end{aligned}$$

(2) 滤网破损时系统的可靠性框图2-19，  
为并联系统。

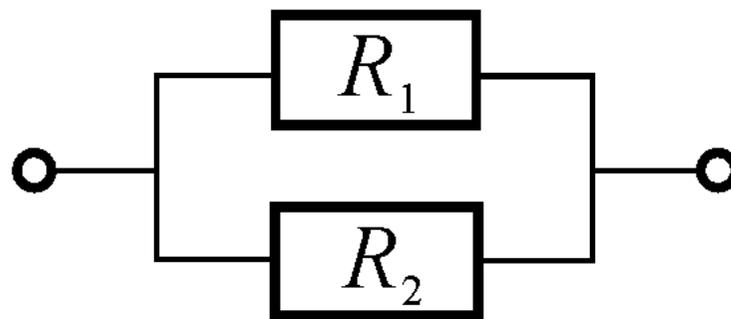


图 2-19滤网破损失效  
时可靠性框图

$$\begin{aligned}
 R_s(1000) &= e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \\
 &= e^{-5 \times 10^{-5} \times 1000} + e^{-1 \times 10^{-5} \times 1000} \\
 &\quad - e^{-(5+1) \times 10^{-5} \times 1000} \\
 &= 0.99925
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{MTBF} &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{1}{5 \times 10^{-5}} + \frac{1}{1 \times 10^{-5}} - \frac{1}{(5 + 1) \times 10^{-5}} \\ &= 10333.3\text{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_s(t) &= \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}} \\ &= \frac{5 \times 10^5 e^{-5 \times 10^5 \times 1000} + 1 \times 10^5 e^{-1 \times 10^5 \times 1000} - (5+1) \times 10^5 e^{-6 \times 10^5 \times 1000}}{e^{-5 \times 10^5 \times 1000} + e^{-1 \times 10^5 \times 1000} - e^{-6 \times 10^5 \times 1000}} \\ &= 0.57 \times 10^7 \text{ h}^{-1} \end{aligned}$$

由例2-4可见：系统的故障模式不同，其可靠性框图也不同，在分析系统可靠性时，必须弄清其功能和失效模式。

在掌握了串联系统和并联系统的可靠性模型的基础上应能解决建立以下较复杂系统的可靠性模型。

## § 2-5 混联系统的可靠性模型

**混联系统**有**串并联系统**（附加单元系统）、**并串联系统**（附加通路系统）和**复杂**的混联系统的可靠性模型。

一、串并联系统(附加单元系统), 图2—20。

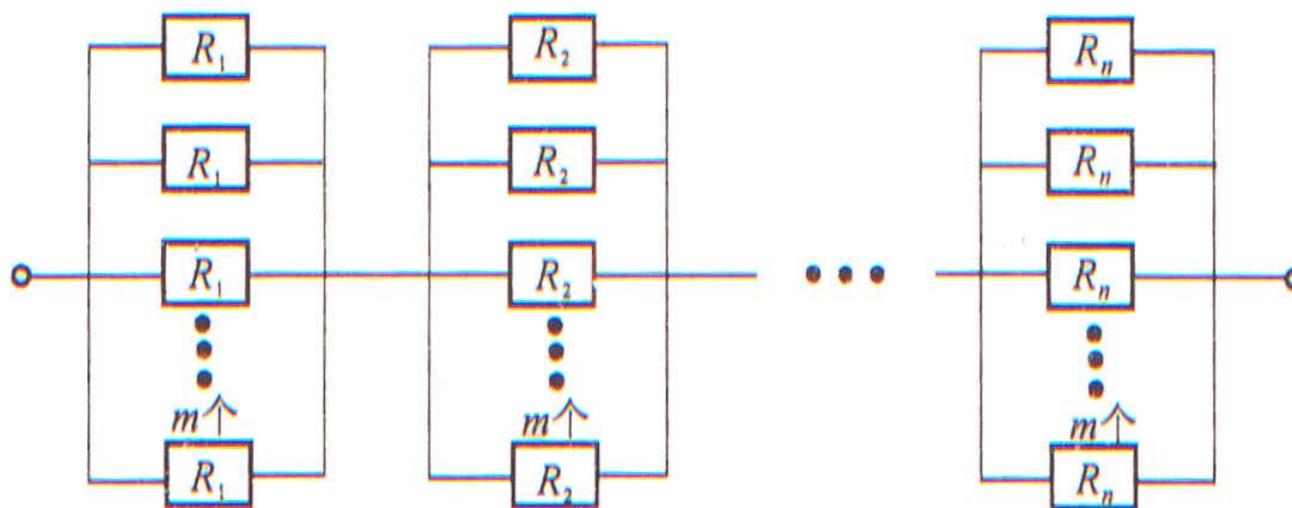


图 2—20 串并联系统的可靠性框图

上图串联了 $n$ 个组成单元, 而每个组成单元由 $m$ 个基本单元并联。

设每个组成单元的可靠度为 $R_i(t)$ ，则  $R_{S1}(t)$ ：

$$R_{S1}(t) = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - (1 - R_i(t))^m \right] \quad (2-18)$$

(括号里为每个并联系统的可靠性)

## 二、并串联系统(附加通路系统),图2-21

29

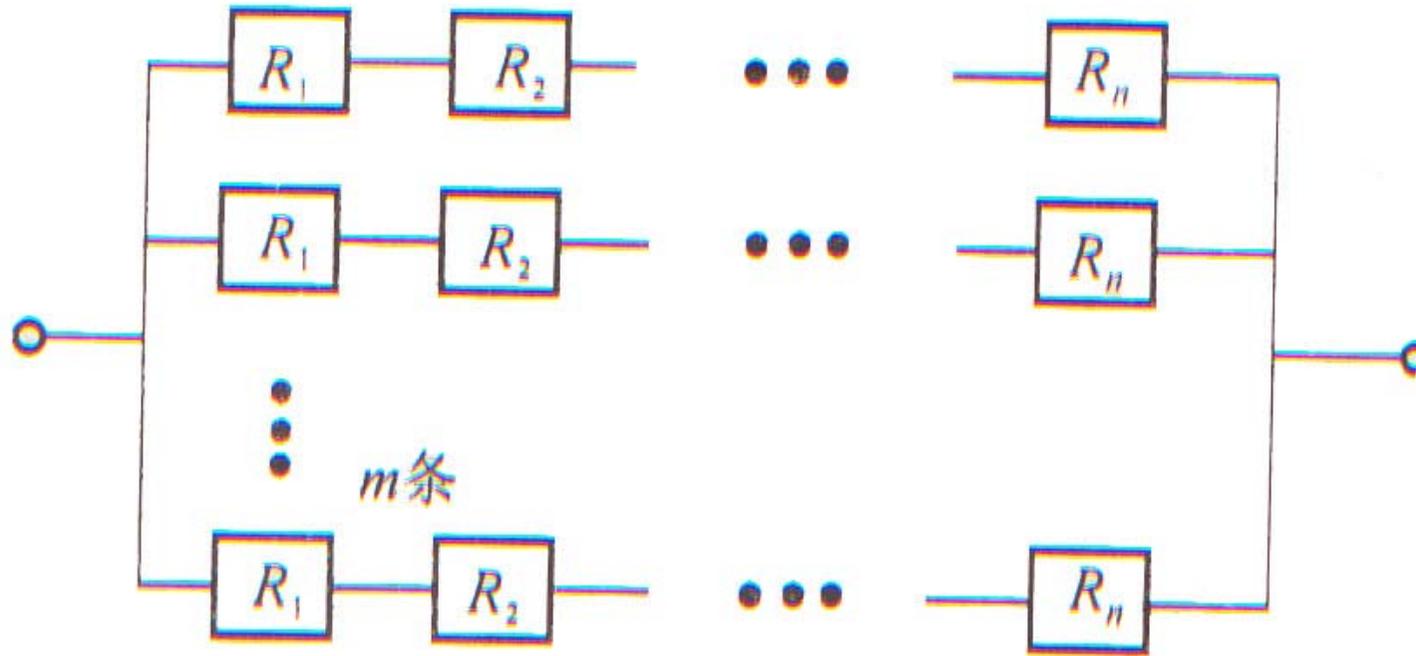


图 2—2.1 并串联系统的可靠性框图

上图并联了 $m$ 个组成单元，而每个组成单元由 $n$ 个基本单元串联。

设每个组成单元的可靠度为 $R_i(t)$ ，则  $R_{S2}(t)$ :

$$R_{s2} = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n R_i(t)\right)^m \quad (2-19)$$

(  $\prod_{i=1}^n R_i(t)$  为每个串联系统的可靠性 )

### 三、较复杂的混联系统的可靠性模型

图2-22。

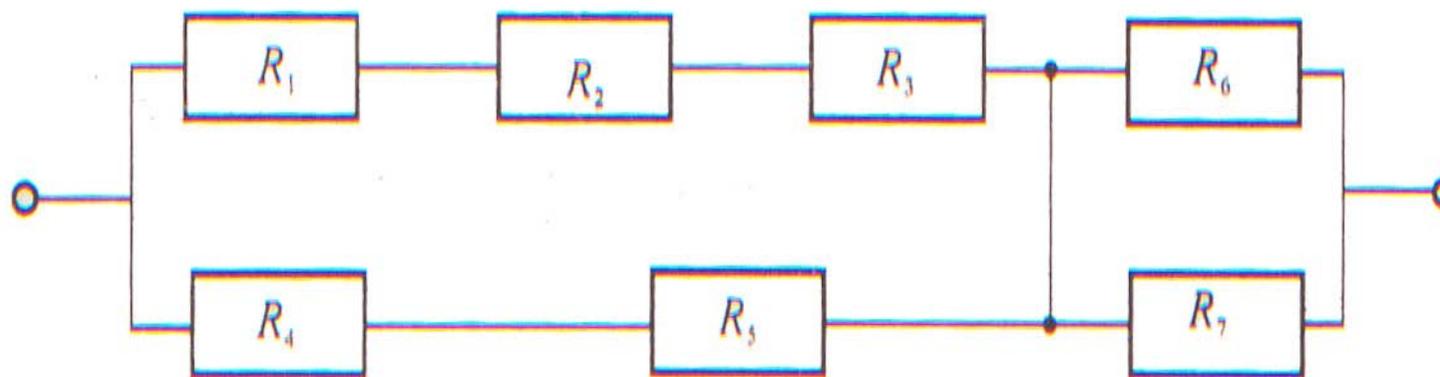


图 2—22 复杂混联系统的可靠性框图

设各单元的可靠度相互独立，求解方法见图2-23图2-25。

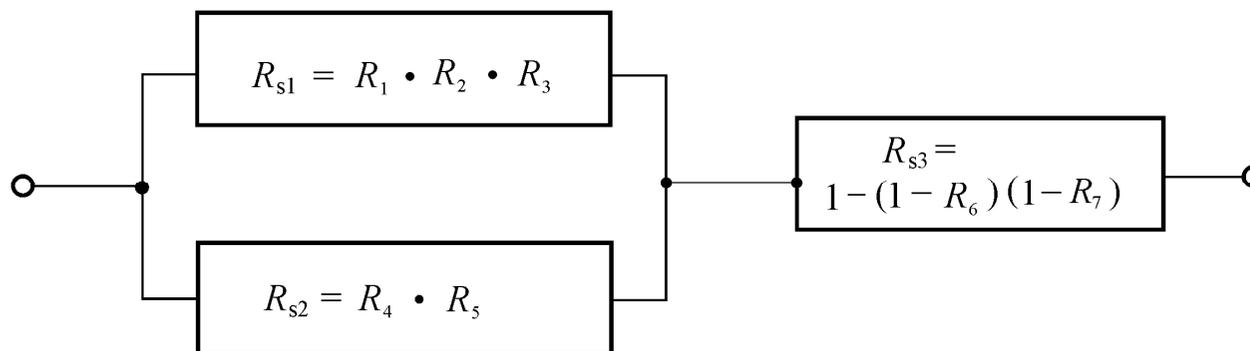


图2-23 图2-22的等效可靠性框图

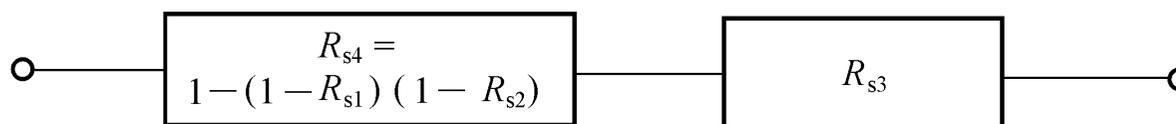


图2-24 图2-23的等效可靠性框图

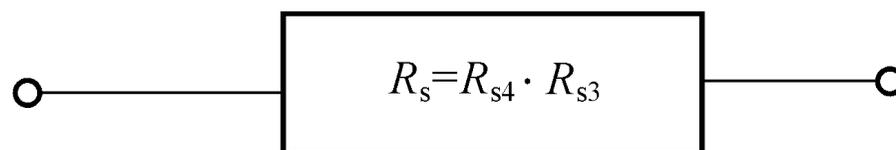


图2-25 图2-24的等效可靠性框图

最终系统可靠度

$R_S$ ;

$$\begin{aligned} R_S &= R_{S4} \cdot R_{S3} \\ &= [1 - (1 - R_{S1}) (1 - R_{S2})] \times \\ &\quad [1 - (1 - R_6) (1 - R_7)] \\ &= [1 - (1 - R_1 R_2 R_3) (1 - R_4 R_5)] \times \\ &\quad [1 - (1 - R_6) (1 - R_7)] \end{aligned}$$

讲到此，大家对于求串联、并联或以它们为组成单元的系统的可靠性，都要非常熟练地掌握的很好。



中国可靠性网

<http://www.kekaoxing.com>

感谢 [kingdodoo](#) 分享