第 二 章 系 统 可 靠 性 模 型

内 容 提 要

§2—6 n 中取 k 的表决系统的可靠性模型

一、定义和特点

二、可靠性框图（k / n [G] 系统的）

三、数学模型 (以2 / 3［G］为例)

§2—7 贮备系统的可靠性模型

一、冷贮备系统

二、热贮备和温贮备系统

§2—6　n 中取 k 的表决系统的可靠性模型

一、定义和特点

n中取k表决系统分两类：n中取k好系统 ***k/n* [G]**；n中取 k 坏系统 k/n [F]。

1. 定义：

***k/n*[G]**：组成系统的n个单元中有k个或k个以上完好，系统才能正常工作的系统称之。

***k/n*[*F*]**：组成系统的n个单元中有k个或k个以上失效，系统就不能正常工作的系统称之。

2.特点：

（1）$k/n\,[G] = (n-k+1)/n\,[F]$；

$n\ /\ n\,[G]$ 为 n 个单元组成的串联系统；

$1\ /\ n\,[G]$ 为 n 个单元组成的并联系统。

（2）$k\ /\ n\,[G]$ 系统的可靠性 $\boldsymbol{R_S}$

$$R_{s串联} < \boldsymbol{R}_{\mathbf{s}} < R_{s并联}$$

条件：三种系统均由**可靠性相同的相同数目的单元组成**。

（3）表决系统是由功能需要建立的——

如计算机软件

二、可靠性框图（k / n [G] 系统的）见图2—26

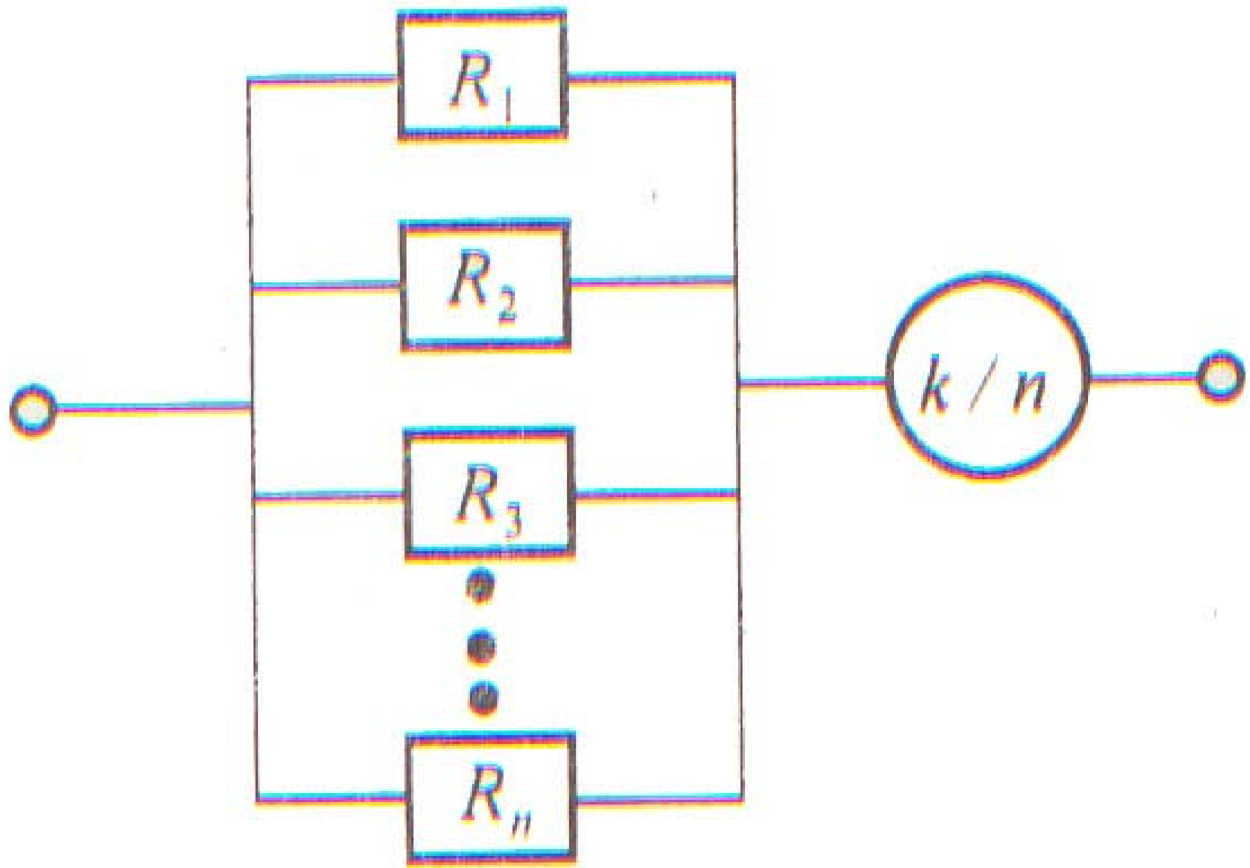

图 2— 26　k/n〔G〕系统

可靠性框图

三、数学模型 (以**2 / 3［*G*］**为例)

1. 2 / 3 [*G*]系统　　其可靠性框图见2—27

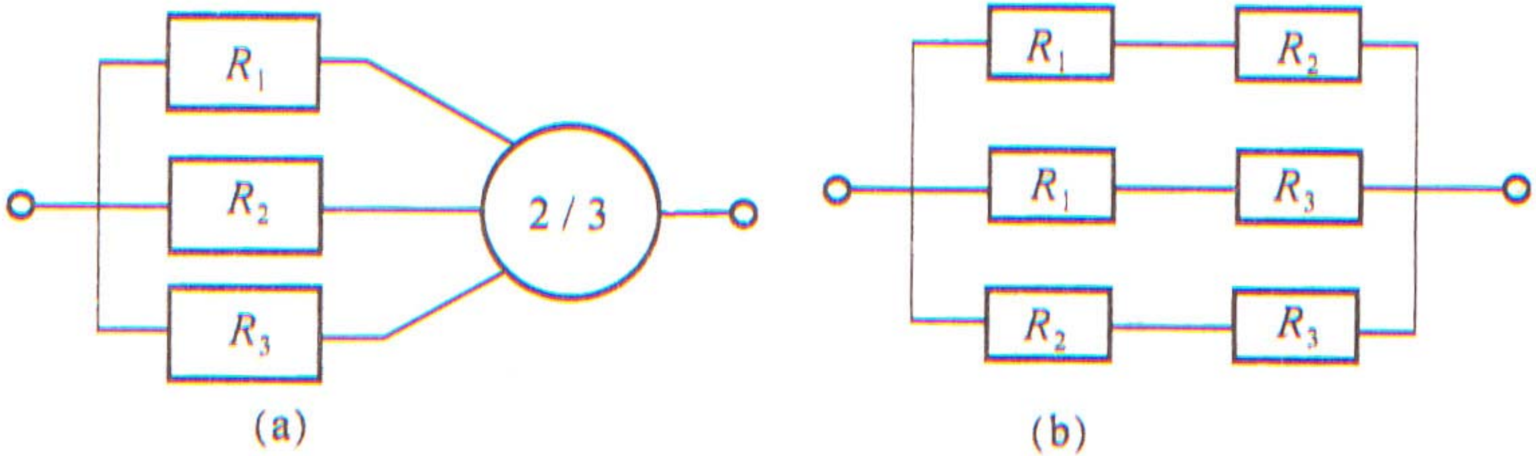

图 2—27　2/3〔*G*〕表决系统可靠性框图

2. 数学模型

设系统处于正常工作的事件为A_s，每个单元的可靠性分别为 $R_1(t)$ 、$R_2(t)$ 、$R_3(t)$ ，各单元处于正常工作的事件分别为 A_1, A_2, A_3 。根据2/3[G]的定义有

$$A_s = A_1A_2A_3 \bigcup A_1A_2A_3' \bigcup A_1A_2'A_3 \bigcup A_1'A_2A_3$$

根据该公式求出该系统的 $R_s(t)$ 及MTBF。

当各单元的寿命分布均为指数分布时 $R_i(t) = e^{-\lambda it}$ ，求系统 $R_s(t)$ 和 MTBF 的公式。

(1) 可靠度

$$R_S(t)=R_1(t)R_2(t)R_3(t)+R_1(t)R_2(t)F_3(t)+$$
$$R_1(t)F_2(t)R_3(t)+F_1(t)R_2(t)R_3(t)$$

∵ 各单元寿命为指数分布：

将 $R_i(t)=e^{-\lambda_i t},F_i(t)=1-R_i(t)$

代入上式得：

$$R_S(t)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}+e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left[1-e^{-\lambda_3 t}\right]+$$
$$e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t}\left[1-e^{-\lambda_2 t}\right]+e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t}\left[1-e^{-\lambda_1 t}\right]$$
$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}+e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t}+e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t}-2e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$$

(2)平均寿命

$$\text{MTBF} = \int_0^{\infty} R_s(t)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} - 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \right] dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

特别当各单元失效率都为 $\lambda=$ 常数

时，$R(t)=e^{-\lambda t}$ ，则

$$R_s(t)=3e^{-2\lambda t}-2e^{-3\lambda t}$$

$$=3R^2(t)-2R^3(t) \qquad （2—20）$$

$$\text{MTBF}=\frac{3}{2\lambda}-\frac{2}{3\lambda}=\frac{5}{6\lambda} \qquad （2—21）$$

例2—5 设每个单元的可靠 $R(t)=e^{-\lambda t}$

度 $\lambda=0.001/h$，且 ，求

t=100h时： R_1

（1）一个单元的系统 R_2 ；

（2）二单元串联系统 R_3 ；

（3）二单元并联系统 R_4 ；

（4）2/3 [G]表决系统的 。

解：t =100h 时四个系统的可靠度如下：

一个单元系统的可靠度为：

$$R_1(100)=e^{-0.001\times100}=e^{-0.1}=0.905$$

由式（2—9）可得两单元串联系统的可靠度为：

$$R_2=R_1^2=(e^{-0.1})^2=0.819$$

由式（2—13）可得两单元并联系统的可靠度为：

$$R_3=1-(1-R_1)^2=1-(1-e^{-0.1})^2=0.991$$

由式（2—20）可得 2 / 3 [G] 表决系统的可靠度为：

$$R_4=3R_1^2-2R_1^3=3e^{-0.2}-2e^{-0.3}=0.975$$

下面讨论以上4种系统可靠度的大小。若 $t=1000\text{h}$时的4种系统的可靠度 R_1, R_2, R_3, R_4 为：

$$R_1 = R(1000) = e^{-0.001\times1000} = e^{-1} = 0.368$$

$$R_2 = R_1^2 = e^{-2} = 0.135$$

$$R_3 = 1-(1-R_1)^2 = 1-(1-e^{-1})^2 = 0.600$$

$$R_4 = 3R_1^2 - 2R_1^3 = 3e^{-2} - 2e^{-3} = 0.306$$

可见，当：

$$R_1 = 0.905 \text{ 时}, \text{有 } R_2 < R_1 < R_4 < R_3$$

$$R_1 = 0.368 \text{ 时}, \text{有 } R_2 < R_4 < R_1 < R_3$$

实际上可以论证：

当 $R_1 > 0.5$ 时，有 $R_2 < R_1 < R_4 < R_3$ ；

当 $R_1 = 0.5$ 时，有 $R_2 < R_1 = R_4 < R_3$ ；

当 $R_1 < 0.5$ 时，有 $R_2 < R_4 < R_1 < R_3$。

上述关系可画成图，如图2—28所示。

当 $R_1 > 0.5$ 时，

有 $R_2 < R_1 < R_4 < R_3$

；当 $R_1 = 0.5$ 时，

有 $R_2 < R_1 = R_4 < R_3$

；当 $R_1 < 0.5$ 时，

有 $R_2 < R_4 < R_1 < R_3$ 。

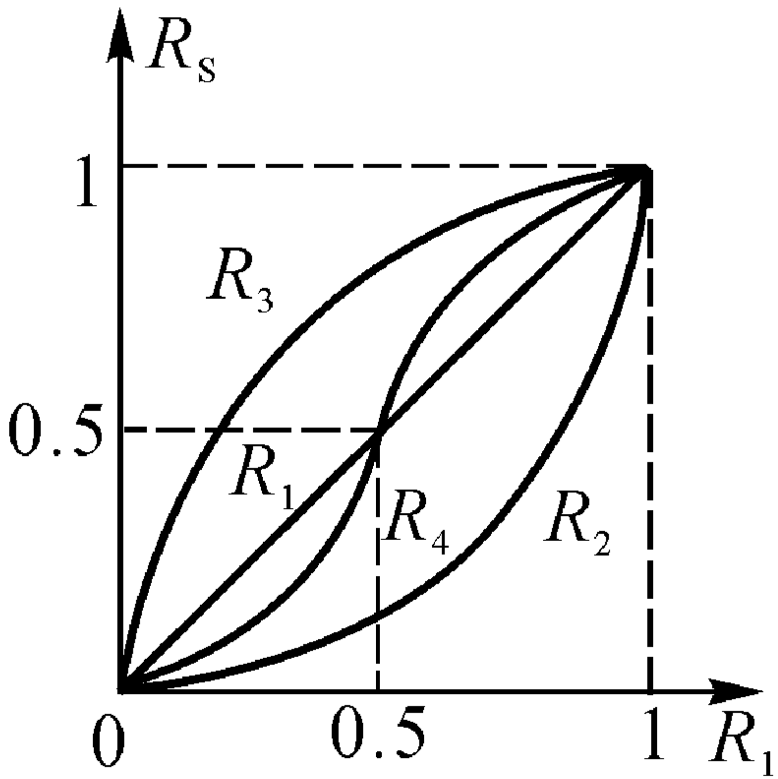

图2-28 **4种系统R比较**

上述关系可画成图，如图2—28所示。

由此可见，两个单元的串联系统可靠度最低，

两个单元的并联系统可靠度最高。

R_1 当单元可靠度小于0.5时，2/3[G]系统的可靠度 Rs 甚至不如一个单元的系统，因此为了改善2/3[G]系统的可靠度特性，必须采取措施。

可见表决系统在可靠性方面的优越性不大，但表决系统往往是从功能的需要建立的，所以也要掌握该系统的可靠度计算方法。

§2—7 贮备系统的可靠性模型

为了提高系统的可靠性，还可以**贮备一些单元，以便当工作单元失效时，立即能由贮备单元接替**，这种系统称为**贮备系统**，其可靠性框图如图2—29所示。

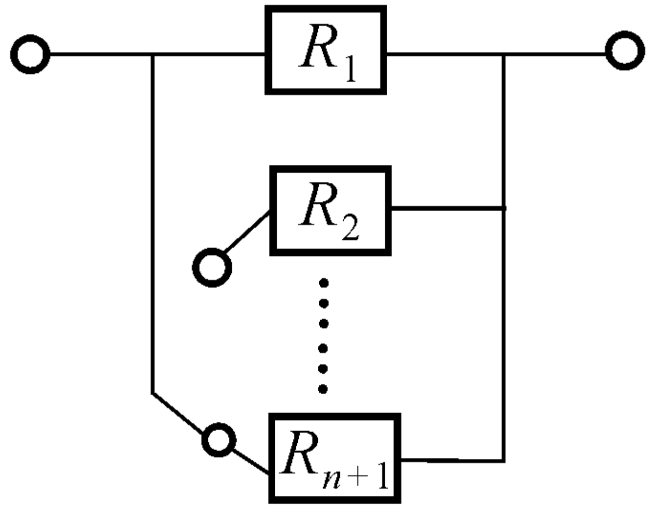

图2-29 贮备系统可靠性框图

贮备系统一般有冷贮备（无载贮备）、热贮备（满载贮备）和所谓温贮备（轻载贮备）之分。

热贮备单元在贮备中的失效率和在工作时的失效率一样。

冷贮备单元在贮备中不会失效。

而**温贮备**单元的贮备失效率大于零而小于工作失效率。

一、冷贮备系统

冷贮备系统通常用n+1个单元和一个高可靠转换开关组成，**一个单元在工作，n个单元作贮备**。

当工作单元失效时，转换开关把一个贮备单元接入，系统继续工作。这样直到所有单元都失效时，系统才失效。

1.平均寿命

假定转换开关完全可靠，各单元平均寿命为 m_i，$i=1\sim n+1$；则系统平均寿命显然等于各单元平均寿命之和，即

$$m_s = \sum_{i=1}^{n+1} m_i \qquad （2—25）$$

当所有单元都服从指数分布时

$$m_s = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i} \qquad （2—26）$$

2. 系统可靠度

$$R_s(t)=\sum_{k=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_k}\Big)e^{-\lambda_k t}$$

（2—27）

在各单元失效率 λ 相同为的条件下

$$R_S(t)=\prod_{k=0}^{n}e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^k/k!$$

（2—28）

如果转换开关不完全可靠，假设它的寿命也服从指数分布，具有常数失效率 λ_{sw}。二单元冷贮备系统为例，有

$$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_{sw} + \lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_{sw}+\lambda_1)t}\right]$$

（2-29）

$$m_s = \int_0^\infty R_s(t)dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2(\lambda_{sw} + \lambda_1)}$$

$(2-30)$

如果转换开关可靠性是常数 R_{sw} ，则相应公式为

$$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + R_{sw}\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) \quad （2—31）$$

$$m_s = \frac{1}{\lambda_1} + R_{sw}\frac{1}{\lambda_2} \quad （2—32）$$

二、热贮备和温贮备系统

热贮备和温贮备系统一般比冷贮备系统复杂，我们来考虑最简单的两个单元的贮备系统。设工作部件失效率为常数 λ_1 ，贮备部件的贮备失效率为常数 η_2，转入工作后的失效率为 λ_2 ，则当转换开关完全可靠时的系统**可靠性**为

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_1 + \eta_2 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \eta_2)t}\right]$$

(2-33)

系统平均寿命为

$$m_s=\int_0^{\infty}R_s(t)dt=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\eta_2}\right) \quad (2—34)$$

当 $\eta_2=\lambda_2$ ，为热贮备系统；

当 $\eta_2=0$ ，为冷贮备系统；

而当时 $0<\eta_2<\lambda_2$ ，则为温贮备系统。

如果转换开关不是完全可靠，则当开关失效率为常数 λ_{sw} 时

$$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_{sw} + \lambda_1 + \eta_2 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_{sw}+\lambda_1+\eta_2)t}\right] \quad （2—35）$$

$$m_s = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{sw} + \eta_2)} \quad （2—36）$$

当开关可靠性为常数 R_{sw} 时

$$R_s(t)=e^{-\lambda_1 t}+R_{sw}\frac{\lambda_1}{\eta_2+\lambda_1-\lambda_2}\left[e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\eta_2+\lambda_1)t}\right]$$

（2—37）

$$m_s=\frac{1}{\lambda_1}+R_{sw}\frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\eta_2)\lambda_2}$$

（2—38）

例如：在正常情况下有6台液体火箭发动机可以满足“土星”火箭第一级的推力要求，但为提高可靠性而采用8台发机一起工作。由于贮备的发动机在飞行中点火来不及，因此不能采用冷贮备方案；而8台发动机按正常推力一起点火又超过第一级推力要求，所以又不能采用热贮备（并联工作）。

为此，在“土星”火箭起飞时，使8台发动机都降负荷工作，使总的推动力等于6台发动机正常推力。一旦有一台发动机发生故障，则通过高度可靠的测量仪器测出故障点，再通过高可靠转换装置关掉有故障的发动机及其对称位置的一台发动机，而使其余6台发动机满载工作，这就是温贮备。

中国可靠性网

http://www.kekaoxing.com

感谢 kingdodoo 分享