第七章　机械结构的可靠性设计

内 答 提 要

§7-2 机械结构可靠性设计的示例

一、随机变量的基本运算规则

二、机械零件的可靠性设计计算

习 题 七　答　案

§7-2 机械结构可靠性设计的示例

一、随机变量的基本运算规则

机械结构可靠性设计又称为概率设计，因此在举例前先列举一些有关概率论计算公式。

设： $X \sim N(\mu_{x},\sigma_x^2)$ ，$Y \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{则} \quad Z = \frac{X}{Y} \sim N(\mu_z,\sigma_z^2) \\
&\text{其中} \quad \mu_z = \frac{\mu_x}{\mu_y} \\
&\qquad \sigma_z = \frac{1}{\mu_y^2}\sqrt{\mu_x^2\sigma_y^2 + \mu_y^2\sigma_x^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

则 $Z = X^2 \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$

其中 $\mu_z = \mu_x^2$

$\sigma_z = 2\mu_x \sigma_x$

(2)

则 $Z = 2X \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$

其中 $\mu_z = 2\mu_x$

$\sigma_z = 2\sigma_x$

(3)

其余公式见表7-3。表中的公式已被概率论所推导，当然工程还要用到更多公式，可直接查有关手册，本处不多举。

正态分布随机变量运算规则

表 7—3

随机变量 W	均值 μ_W	标准差 σ_W
$W=aX$	$a\mu_X$	$a\sigma_X$
$W=X+a$	μ_X+a	σ_X
$W=X+Y$	$\mu_X+\mu_Y$	$(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)^{\frac{1}{2}}$
$W=X-Y$	$\mu_X-\mu_Y$	$(\sigma_X^2+\sigma_Y)^{\frac{1}{2}}$
$W=XY$	$\mu_X\mu_Y$	$[\mu_X^2\sigma_Y^2+\mu_Y^2\sigma_X^2+\sigma_X^2\sigma_Y^2]^{\frac{1}{2}}$
$W=X^2$	μ_X^2	$2\mu_X\sigma_X$
$W=X^3$	μ_X^3	$3\mu_X^2\sigma_X$
$W=X^n$ （n 为正整数）	μ_X^n	$n\mu_X^{n-1}\sigma_X$
$W=\frac{1}{X}$	$\frac{1}{\mu_X}$	$\frac{\sigma_X}{\mu_X^2}$
$W=X^{\frac{1}{2}}$	$(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu_X^2-2\sigma_X^2})^{\frac{1}{2}}$	$(\mu_X-\frac{1}{2}\sqrt{4\mu_X^2-2\sigma_X^2})^{\frac{1}{2}}$
$W=\frac{X}{Y}$	$\approx\mu_X/\mu_Y$	$\approx\frac{1}{\mu_Y^2}\sqrt{\mu_X^2\sigma_Y^2+\mu_Y^2\sigma_X^2}$

例7-2 作用在某零件上呈**正态分布**的两个力，它们作用的**方向相同且在同一直线上**。其参数： $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) = N(4900, 294^2)(\mathrm{N})$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(2940, 245^2)(\mathrm{N})$$

求合力 $F = X_1 + X_2$ 。

解：∵ X_1，X_2 为正态分布，

∴ $F = X_1 + X_2$ 也为正态分布。

由表7-3得合力的均值和标准差分别为：

$$\mu_F = \mu_1 + \mu_2 = 4900 + 2940 = 7840(\mathrm{N})$$

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{294^2 + 245^2} = 382.7(\mathrm{N})$$

故合力 $F \sim N(\mu_F, \sigma_F) = N(7480, 382.7)(\mathrm{N})$

例 7-3 有一力矩M作用在臂长为L的杆上，

其参数为：$M \sim N(\mu_M, \sigma_M) = N(117600, 9604)\mathrm{N\text{-}cm}$

$$L \sim N(\mu_L, \sigma_L) = N(100, 1.5)\mathrm{cm}$$

求在杆件一端与M平衡的作用力P。

解：$\because \quad M = P\,L \qquad \therefore \quad P = M\,/\,L$ 。

由表7-3可得P的均值和标标准差分别为：

$$\mu_P = \mu_M \big/ \mu_L = 117600/100 = 1176(\mathrm{N})$$

$$\sigma_P = \frac{1}{\mu_L^2}\sqrt{\mu_L^2\sigma_M^2 + \mu_M^2\sigma_L^2}$$

$$= \frac{1}{100^2}\sqrt{100^2 \times 9604^2 + 117600^2 \times 1.5^2} = 97.6(\mathrm{N})$$

故合力 $P \sim N(\mu_P, \sigma_P) = N(1176, 97.6)(\mathrm{N})$

例 7-4 有一受拉杆件，载荷为F、截面积为A。其参数为：

$$F \sim N(\mu_F, \sigma_F) = N(9.8\times10^4, 9.8\times10^3)(\mathrm{N})$$

$$A \sim N(\mu_A, \sigma_A) = N(5.0, 0.4)(\mathrm{cm}^2)$$

求 该拉杆应力L的均值和标准差。

解： $\because$ 应力 $L = F/A$ ，

$$\therefore \quad L \sim N(\mu_L, \sigma_L)$$

由表7-3可得L的均值和标标准差分别为：

$$\mu_L = \frac{\mu_F}{\mu_A} = \frac{9.8\times10^4}{5} = 1.96\times10^4(\mathrm{N/cm}^2)$$

$$\sigma_L = \frac{1}{\mu_A^2}\sqrt{\mu_A^2\sigma_F^2 + \mu_F^2\sigma_A^2}$$

$$= \frac{1}{5^2}\sqrt{5^2(9.8\times10^3)^2 + (9.8\times10^4)^2\times0.4^2} = 2510.02(\mathrm{N/cm}^2)$$

有时也可用泰勒级数展开方法求随机变量均值和标准差的近似值。

若随机变量的函数为：

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

则其展开式为：

$$
\begin{aligned}
Y &= f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&= f(\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_n) + \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial Y}{X_i} \right|_{X_i=\mu} (X_1 - \mu_i) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial Y}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{X=\mu} (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)
\end{aligned}
$$

设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为相互独立的随机变量，

则 Y 的均值和标准差为：

$$\mu_Y \approx f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \qquad (7\text{-}14)$$

$$\sigma_Y \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial Y}{\partial X_i} \bigg|_{X_i=\mu_i} \right]^2 \sigma_i^2} \qquad (7\text{-}15)$$

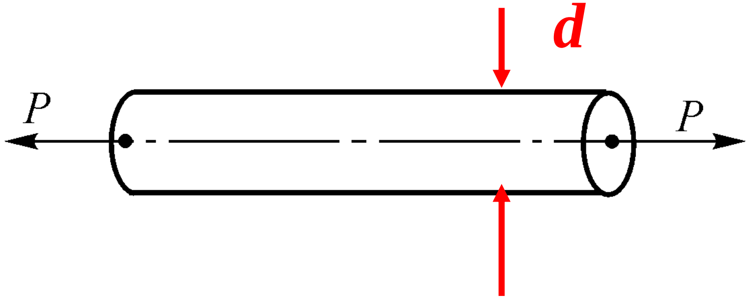
式中 $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ − 为 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的均值。

σ_i − 为 X_i 的标准差。

二、机械零件的可靠性设计计算

这里通过典型零件的可靠性设计来说明可靠性设计的一般方法。

例 7-5 一个圆棒，已知作用于杆上的拉力为：载荷P~N（3000, 45^2）kgf，如图7-7所示。



拉杆的材料为低合金钢，回火温度538℃（因此查材料手册得：其强度极限 $\mu_{\sigma_b}=107.6\text{kgf}/mm^2$，标准离差 $\sigma_{\sigma_b}=4.22\text{kgf/mm}^2$，且符合正态分布)，

制造中半径符合正态分布，具有 $r=\bar{r}\pm 0.015\bar{r}$

且若要求加工后圆棒拉杆的可靠度R=0.999。

求该杆的直径(d = ？)。

解题思路：

使用应力—强度干涉理论的公式解之，关键确定应力的数学期望和标准离差，及强度的数学期望和标准离差。

只要其中只含一个反映半径数学特征量，即可用一式(7-10)解之。

解：(1)求强度X_S的均值 μ_S 和标准差 σ_S

据题意可以得出：

$$\mu_S = \mu_{\sigma_b} = 107.6\mathrm{kgf/mm}^2$$

$$\sigma_S = \sigma_{\sigma_b} = 4.22\mathrm{kgf/mm}^2$$

(2) 求应力X_L的均值 μ_L 和标准差 σ_L

$$X_L = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2}$$

其中 $P \sim N(\mu_P, \sigma_P) = N(3000, 45)\mathrm{kgf}$

即 $\mu_P = 3000\mathrm{kgf}\ , \sigma_p = 45\mathrm{kgf}$

A圆棒拉杆截面积：$A = \pi r^2$，制造半径为

$$r = \bar{r} \pm 0.015\bar{r}$$

其离散范围取 $\Delta_r = \pm 3\sigma_r$ 见图7-8。

半径 r 的均值和标准差为：

$$\mu_r = \bar{r}$$

$$\sigma_r = \frac{0.015}{3} = 0.005\bar{r}$$

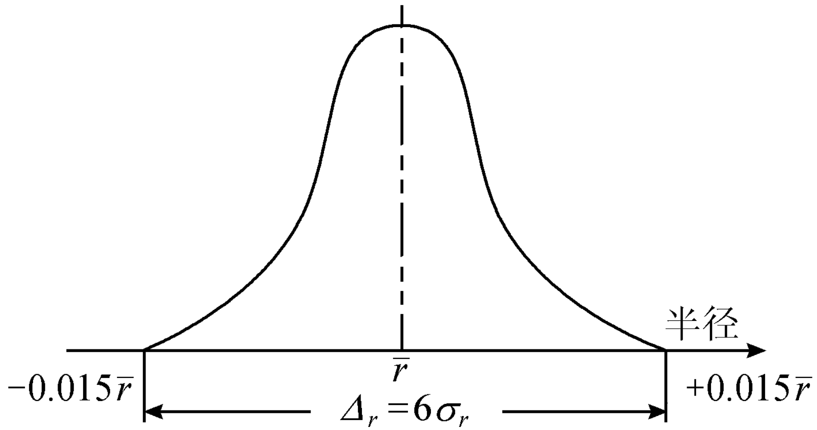


图7-8 离散范围与标准差

由表7-3可得A的均值和标标准差分别为：

$$\mu_A = \pi\mu_r^2 = \pi\,\bar{r}^2\ ,\sigma_A = 2\pi\mu_r\sigma_r = 2\pi\,\bar{r}\,\sigma_r$$

应力 $X_L = P/A$ 均值和标标准差分别为：

$$\mu_L = \frac{\mu_P}{\mu_A} = \frac{3000}{\pi\,\bar{r}^2} = 954.93/\bar{r}^2$$

$$\sigma_L = \frac{1}{\mu_A^2}\sqrt{\mu_P^2\sigma_A^2 + \mu_A^2\sigma_P^2}$$

$$= \frac{1}{(\pi\mu_r^2)^2}\sqrt{\mu_P^2(2\pi\mu_r\sigma_r)^2 + (\pi\mu_r^2)^2\sigma_P^2}$$

$$= \frac{1}{(\pi\bar{r}^2)^2}\sqrt{3000^2(2\pi\bar{r}\sigma_r)^2 + (\pi\bar{r}^2)^2 \times 45^2}$$

$$\sigma_L=\frac{1}{(\pi\bar{r}^2)^2}\sqrt{3000^2(2\pi\bar{r}\times0.005\bar{r})^2+(\pi\bar{r}^2)^2\times45^2}$$
$$=17.215/\bar{r}^2$$

(3) 由 R 求 **Z**

由 R = 0.999 ⟶ 表 7-2 ⟶ Z = 3.091

(4) 利用式(7-11)求 $\bar{r}$

因为 $$Z=\frac{\mu_S-\mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_L^2}}$$

将上述有关数据代入上式可得:

$$Z=\frac{\mu_S-\mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_L^2}}$$

即 $$3.091=\frac{107.6-(954.93/\bar{r}^2)}{\sqrt{4.22^2+(17.215/\bar{r}^2)^2}}$$

整理后得：

$$1969914.9\bar{r}^4+205500.94\bar{r}^2-909059.83=0$$

解得： $\bar{r}=3.188\quad(\text{mm})$

(5) 求直径 ***d*** 的均值和标准差为：

因为 $\mu_d=2\mu_r=2\times3.188=6.376(\text{mm})$

$$\sigma_d = 2\sigma_r = 2\times 0.005\bar{r}$$
$$= 2\times 0.005\times 3.188$$
$$= 0.032(\mathrm{mm})$$

直径的上、下偏差为：

$$\pm 3\sigma_d = \pm 3\times 0.032 = \pm 0.096(\mathrm{mm})$$

结论：

$$d = 6.376\pm 0.096 \approx 6.4\pm 01(\mathrm{mm})$$

(6) 与传统的设计比较：

传统的设计方法，一般以强极限为基准的，安全系数 $n_b = 2\sim3.5$。若 $\mathbf{n_b = 3}$。

因为 $$n_b = \frac{\mu_S}{\mu_L} = \frac{\mu_S}{P/\pi r^2}$$

将已知的 数代入上式得：

$$r = \sqrt{\frac{Pn_b}{\pi\mu_s}} = \sqrt{\frac{3000\times3}{3.14\times107.6}} = 5.16(\mathrm{mm})$$

直径 $$d = 10.32(\mathrm{mm})$$

讨论： 可见用传统的设计求得的直径 ***d*=10.32**(mm)，要比用可靠性设计求得的直径***d* = 6.4**(mm)大的多。如果我们没有进行可靠性设计只进行了传统设计，那么我们无论如何不敢取 d=6.4mm，进行了可靠性设计我们就敢取 d=6.4mm，因为取其，**可靠度*R*可达99.9%，破坏的概率只有0.1%，是完全可用的，因而保证了结构不会过重。**

例7-6 有一个承受集中载荷的简支工字梁，如图7-9所示。已知各参数为：

强度：$X_S \sim N(\mu_S, \sigma_S) = N(117119.8, 3283)\,\mathrm{N/cm^2}$

载荷：$P \sim N(\mu_P, \sigma_P) = N(26989.2, 891.8)\,\mathrm{N}$

梁长：$L = (304.8 \pm 0.32)\,\mathrm{cm}$

力P与梁C端长：$A \sim N(\mu_A, \sigma_A) = N(183, 0.106)\,\mathrm{cm}$

要求该梁的可靠度R=0.999,求该梁的截面尺寸(设H的变差系数$C_{VH} = \dfrac{\sigma_H}{\mu_H} = 0.01$)。

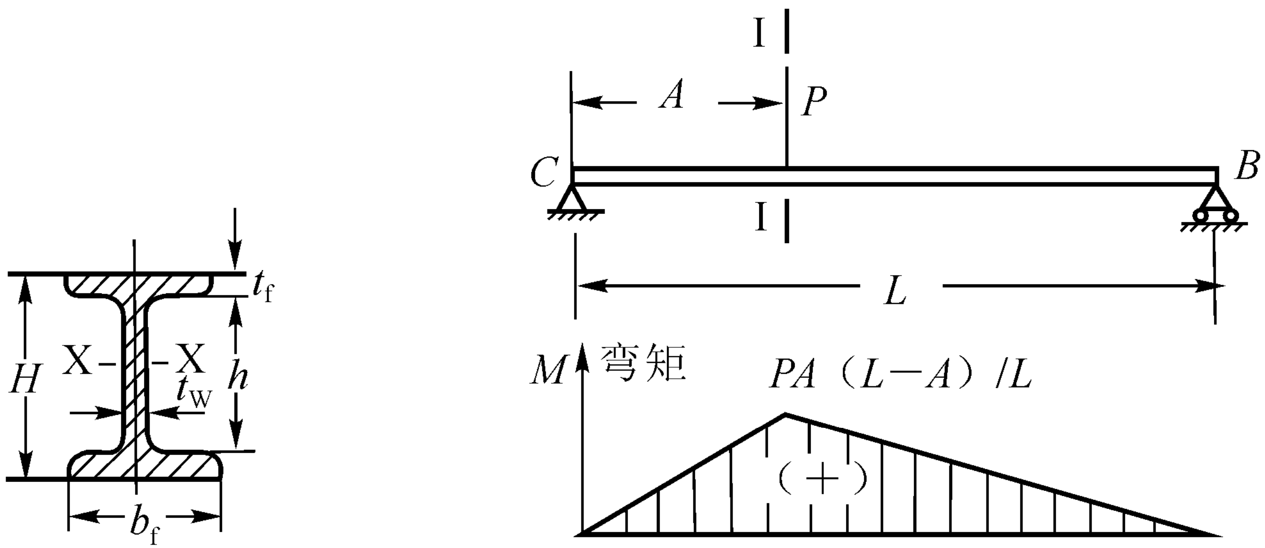
解：(1) 求强度的均值和标准差

由题意得：$\mu_S = 117119.8\,\mathrm{N/cm^2}, \sigma_S = 3283\,\mathrm{N/cm^2}$

(2) 求应力的均值和标准差

查机械零件手册得工字梁参数比：

$$\frac{b_f}{t_f} = 8.88;\ \frac{H}{t_W} = 15.7;\ \frac{b_f}{H} = 0.92$$



(a) (b)

图 7-9简支工字梁受力图

由图可见，**I - I 截面**为危险截面，受**弯曲应力最大。先求参数*H*。**

设截面中性轴X-X的惯性矩为*I*，设***e***为中性轴到该截面最外纤维的距离，即***e* = *H*/2。**

从手册中查出可有：

$$\frac{I}{e}=\frac{\left[b_f H^3-(b_f-t_W)(H-2t_f)^3\right]/12}{H/2}=0.0822H^2$$

由题意，$C_{VH}=\dfrac{\sigma_H}{\mu_H}=0.01$，则$\sigma_H=0.01\mu_H$

查表7-3得 *I/e*的 $\mu_{I/e}$和$\sigma_{I/e}$分别为

$$\mu_{I/e}=0.0822\mu_H^2$$

$$\sigma_{I/e}=0.0822\times 2\mu_H\sigma_H=0.0822\times 2\mu_H\times 0.01\mu_H$$

$$=0.001644\mu_H^2$$

最大弯矩 $M = PA(L - A)/L$，

因为 $L = (304.8 \pm 0.32)\text{cm}$，

所以 $\mu_L = 304.8\text{cm}$ ，$\sigma_L = \frac{1}{3} \times 0.32 = 0.107\text{cm}$

根据式(7-14)和式(7-15)得M的μ_M和σ_M为

$$\begin{aligned}\mu_M &= f(\mu_P, \mu_A, \mu_L) = \mu_P \mu_A (\mu_L - \mu_A) / \mu_L \\ &= 26989.2 \times 183(304.8 - 183)/304.8 \\ &= 1973664.9\text{N} - \text{cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_M &= \sqrt{(\frac{\partial M}{\partial P})^2 \sigma_P^2 + (\frac{\partial M}{\partial A})^2 \sigma_A^2 + (\frac{\partial M}{\partial L})^2 \sigma_L^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{A(L-A)}{L}\right]^2 \sigma_P^2 + (P - \frac{2PA}{L})^2 \sigma_A^2 + (-\frac{PA^2}{L^2})^2 \sigma_L^2}\end{aligned}$$

$$A=\mu_A=183\text{cm},\ \ L=\mu_L=304.8\text{cm},$$

$$P=\mu_P=26989.2\text{N}$$

$$\sigma_{\text{A}}=0.106\text{cm},\ \ \sigma_L=0.107\text{cm},$$

$\sigma_P=891.8\text{N}$，分别代人上式得：

$$\sigma_M=65226.35\text{N}-\text{cm}$$

梁的最大处弯曲应力

$X_L=M/(I/e)$的$\mu_{L_{\text{I}}}$和$\sigma_{L_{\text{I}}}$分别为：

$$\mu_{L_{\mathrm{I}}} = \frac{\mu_M}{\mu_{I/e}} = \frac{1973664.9}{0.0822\mu_H^2} = 24010522/\mu_H^2$$

$$\sigma_{L_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{(\mu_{I/e})^2}\sqrt{\mu_M^2\sigma_{I/e}^2 + \mu_{I/e}^2\sigma_M^2} = 927500.33/\mu_H^2$$

(3) 由 R求 Z 及高度H 的均值标准差

由 $R = 0.999$→表**7-2**→Z=3.091→式**(7-11)**

$$Z = \frac{\mu_S - \mu_{L_{\mathrm{I}}}}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_{L_{\mathrm{I}}}^2}} = 3.091$$

即

$$\frac{117119.8 - 24010522/\mu_H^2}{\sqrt{3283^2 + (927500.33/\mu_H^2)^2}} = 3.091$$

将上式整理化简后得：

$$\mu_H^4 - 413.12\mu_H^2 + 41742.56 = 0$$

解得工字梁高度均值和标准差为：

$$\mu_H = 15.4\text{cm}$$

标准差 $\sigma_H = 0.01\mu_H = 0.154\text{cm}$

故工字梁高度：

$$H = \mu_H \pm 3\sigma_H = (15.4 \pm 0.46)\text{cm}$$

(4) 求工字梁其他参数：**t_w、 b_f 、 t_f**

① 求 $t_W = ?$

$$\mu_{t_W} = t_W = \mu_H / 15.7 = 15.4/15.7 = 0.98$$

$$\sigma_{t_W} = \frac{\sigma_H}{15.7} = \frac{0.154}{15.7} = 0.0098$$

故有

$$t_W = \mu_{t_W} \pm 3\sigma_{t_W} = 0.98 \pm 0.029(\text{cm})$$

② 求 $b_f = ?$

$$\mu_{b_f} = 0.92\mu_H = 0.92 \times 15.4 = 14.17$$

$$\sigma_{b_f} = 0.92\sigma_H = 0.92 \times 0.154 = 0.14$$

故有

$$b_f = \mu_{b_f} \pm 3\sigma_{b_f} = 14.17 \pm 0.42(\text{cm})$$

③ 求 $t_f = ?$

$$\mu_{t_f} = 0.1036\mu_H = 0.1036 \times 15.4 = 1.6$$

$$\sigma_{t_f} = 0.1036\sigma_H = 0.1036 \times 0.154 = 0.016$$

故有

$$t_f = \mu_{t_f} \pm 3\sigma_{f_f} = 1.6 \pm 0.0.48(\text{cm})$$

例7-7 有一实心轴,一端固定另一端承受扭矩T，实心轴材料剪切强度X_S。其参数值为：

$$T \sim N(\mu_T, \sigma_T) = N(100000, 10000)\,\mathrm{N-cm}$$

$$X \sim N(\mu_S, \sigma_S) = N(\mu_\tau, \sigma_\tau) = N(3200, 150)\,\mathrm{N/cm^2}$$

求 $R = 0.999$时，该轴半径 $\boldsymbol{r}$ **= ？**

(变差系数 $c_{Vr} = 0.01$)

解：(1) 求轴的材料强度X_S的均值和标准差

由题可知 $$\mu_S = \mu_\tau = 3200\,\mathrm{N/cm^2}$$

$$\sigma_S = \sigma_\tau = 150\,\mathrm{N/cm^2}$$

(2) 求轴的材料应力X_L的均值和标准差

由材料力学可知,该轴各截面所受扭矩T相同，此时实心轴截面圆周上各点为危险点。

各危险点所受剪切应力为：

$$X_L = \tau = \frac{Tr}{I_P} = \frac{Tr}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{2T}{\pi r^3}$$

式中　r — 实心轴半径；

I_P — 轴横截面极惯性矩。

根据式(7-14)和(7-15)求X_{L}的均值和标准差为

$$\mu_L = \frac{2T}{\pi\mu_r^3} = \frac{2\times 100000}{\pi\mu_r^3}$$

$$\sigma_L = \sqrt{(\frac{\partial X_L}{\partial T})^2\sigma_T^2 + (\frac{\partial X_L}{\partial r})^2\sigma_r^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{2}{\pi r^3})\sigma_T^2 + (\frac{-6T}{\pi r^4})^2\sigma_r^2}$$

将 $r = \mu_r, T = \mu_T = 100000, \sigma_T = 10000$

$\sigma_r = 0.01\mu_r$,分别代入上式得

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{4\times 10000^2}{\pi^2 r^6} + \frac{36\times 100000^2 \times 0.01^2 \mu_r^2}{\pi^2 \mu_r^8}}$$

$$= \frac{20880.6}{\pi r^3}$$

(3) 由 $R = 0.999$ 求 $Z = ?$

由 $R = 0.999$ → 表**7-2** → $Z = 3.091$。

(4) 利用式(7-11)求半径的均值和标准差

因为$X_S > X_L$时，该轴可靠，将有关参数代入式(7-11)得：

$$Z=\frac{\mu_S-\mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_L^2}}=3.091$$

则有
$$\frac{3200-2\times100000/\pi\mu_r^3}{\sqrt{150^2+\frac{436\times10^6}{\pi^2\mu_r^6}}}=3.091$$

整理化简后得：

$$\mu_r^6-40.64\mu_r^3+362.17=0$$

解得： $\mu_r=3.02(\mathrm{cm})$

半径标准差为：$\sigma_r = 0.01\mu_r = 0.03(\text{cm})$

故 $r = \mu_r \pm 3\sigma_r = 3.02 \pm 0.09(\text{cm})$

通过上述几例,可以了解一般机械结构可靠性设计计算概略。

其要点：

(1) 确定强度条件，列出应力计算式；

(2) 列出包含尺寸参数的应力和强度的关系式；

(3) 用联结方程(式7-11)与所要求的可靠性相结合，求解方程，即可得所要求的参数。

上面我们仅研究了静强度的可靠性设计，关于疲劳强度和磨损等的可靠性设计，我们不打算在此讲了，今后大家遇到这方面的问题，请自行参阅有关资料。

习 题 七　答　案

2.　$Z = 4$，　$R = 0.9_4683 = 0.9999683$，

$F = 0.0000317$

3.　(1)　$\mu_S = \mu_{\sigma_b} = 80$　，

$$\sigma_s = \sigma_{\sigma_b} = 3.2(\mathrm{N/cm^2})$$

(2)　$\mu_L = 795.775 / \bar{r}^2$

$$\sigma_L = 12.43 / \bar{r}^2$$

(3) $$Z = 3.091$$

$$\bar{r} = 3.382, \sigma_r = 0.017$$

$$d = 2 \times \bar{r} = 6.764 \text{ ， } \sigma_d = 0.034$$

直径为 $$6.77 \pm 0.10(\text{mm})$$

中国可靠性网

http://www.kekaoxing.com

感谢 kingdodoo 分享