第九章 单 元 产 的 可 靠 性 评 估

内 容 提 要

§9-1 概 述

一、单元产品的定义：

二、研究单元产品可靠性评估的意义：

三、进行单元产品可靠评估的前题条件和评估的一般程序

§9-2 单元产品的可靠性评估

一、点估计

二、区间估计

§9-3 常用失效分布类型单元产品的可靠性评估

一、成败型单元产品的可靠性评估

二、单元产品性能可靠性评估

从第一章所学知识，我们清楚地看出，当一个产品的失效概率函数（即失效分布）已知时，它的可靠性指标，如可靠度，失效率，平均寿命（MTBF或MTTF），可靠寿命（当可靠度为一确定值 r 时的寿命）等均可求出。

批量生产的每一批产品，实际上都存在着这样一个失效概率函数，在坐标系上均可画出一条相应的曲线。实事上当使用方接受生产方的这一批产品时，生产方无论如何也不可能向对方提供出这样一条精确的曲线。

因为根据概率论理论，只有把使用方所接受的这整个一批产品试验到全部失效后，在数学统计的基础上才能得到这条曲线(失效概率分布)。

显然这时的使用方将得不到一个合格的产品（因全部试验失效了）。

如何来判定批量产品的可靠性指标？我们希望能用抽样试验的方法来评估该批产品的可靠性指标。

即按抽样理论规定，在交检批量的产品（母体）中随机地抽一小批产品（子样）来进行寿命试验。

以子样的每一个产品的试验结果来推断母体产品的有关可靠性指标。

这就是产品的可靠性评估问题，本章我们讲解这方面内容。

抽样方法，可见国标 GB2828—生产方对产品质量监督。

GB2829 通过对产品检验生产方保质能力。

产品可分为：
- 单元产品
- 系统产品

本章将研究单元产品的可靠性评估方法。

§9-1　概　　述

一、单元产品的定义：

工厂单独生产和可以单独验收的零部件，包括即将装入系统中的元器件，也包括可以直接单独验收的整机，分系统、系统等。

二、研究单元产品可靠性评估的意义：

因为单元产品的可靠性直接影响系统的可靠性，为了有效地保证和提高系统的可靠性，首先应尽可能准确地评估系统实际的可靠性，则要首先解决准确估计单元产品可靠性的问题。

三、进行单元产品可靠评估的前题条件和评估的一般程序

1. 进行评估的前题条件

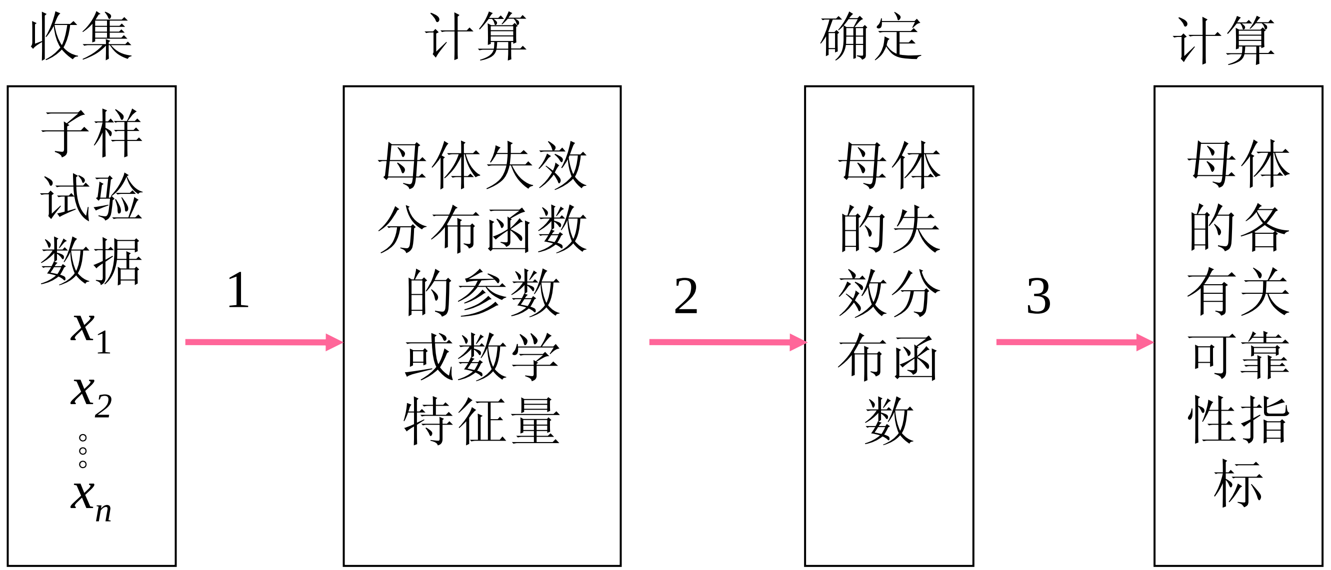
前题条件：

已知被研究产品的失效分布类型。

失效分布类型一般可以通过产品寿命试验确定，也可求其参数。

对于常用产品的失效分布类型可以通过查阅有关手册。

2. 评估的一般程序 (见下图)



以上步骤2是纯数学问题，步骤3在第一章中已有研究，本处我们主要研究步骤1，其中各失效分布函数的参数请参见第一章有关内容。

3. 评估的方法

- 评估的方法
  - (1) 点估计
    - 矩法
    - 极大似然法

    特点：简单、精度低
  - (2) 区间估计

    特点：复杂、精度高

§9-2　单元产品的可靠性评估

对单元产品的可靠性评估，一般采用点估计和区间估计。对某些分布，如寿命为威布尔分布时，对其可靠性评估也常用图估法和数值法进行点估计和区间估计。

一、点估计

在点估计的各种计算方法中，我们仅介绍矩法和极大似然法。

1. 矩法

矩法是以子样的各阶矩估计母体各阶矩的评估方法。

例如：以子样的算术平均值 $\overline{X}$ 作为母体分布的数学期望 $E(X)=\mu$ 的估计值 $\hat{\mu}$ ，而以子样方差S^2作为母体方差 $D(X)=\sigma^2$ 的估计值 $\hat{\sigma}^2$ 。即有：

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (9\text{-}1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (9\text{-}2)$$

式中　x_i——子样中第i个产品的试验数据；

n ——子样中包含产品的数目。

2. 极大似然法：

把母体待估参数一切可能取值中使观测结果出现概率最大的那个参数定做母体参数的估计值。

若母体待估参数 $\hat{x}$ 的一切可能取值在 $\left[x_1 \sim x_n\right]$ 范围，抽样观测结果x出现的概率L（x），如图9-1所示：

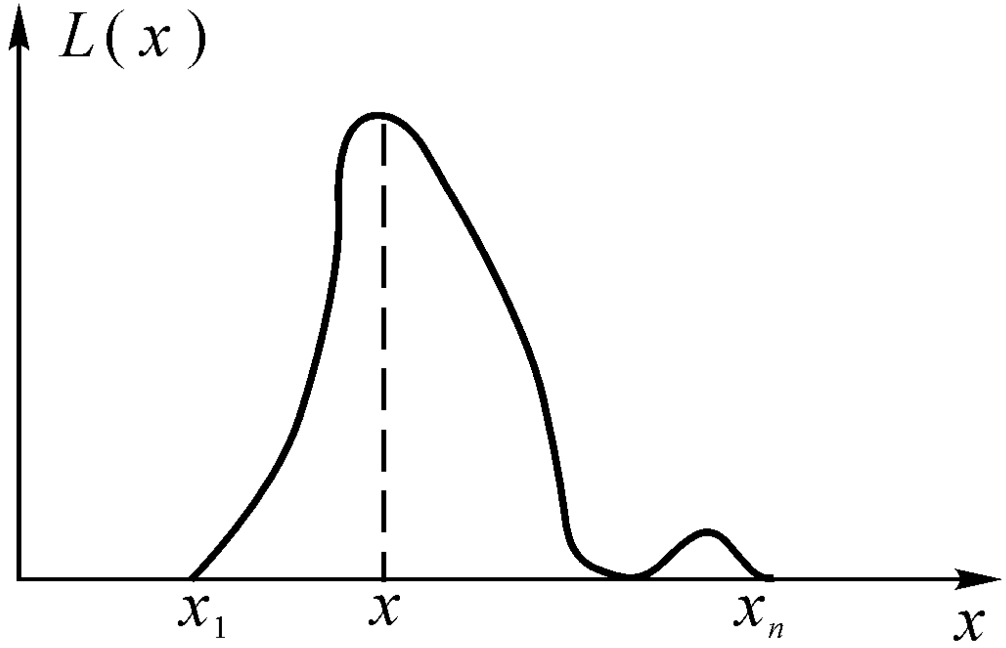


图9-1

显然参数估值 $\hat{X}$ 处, $\frac{dL(x)}{dx}=0$

若已知 $L(x)$，则可求出 $\hat{X}$ 。

从上可见：

① 无论是用矩法还是用极大似然法，得出的母体待估参数，对于每一个不同的子样均可能是不同的。由于母体的待估参数的真值实际上只能有一个，因此可以判定用点估计得出的计算结果肯定不完全等于母体待估参数的真值。

② 计算结果和真值的误差究竟有多少？这些误差究竟不超过多少可以用？**点估计都不能说清楚。**

因此在工程中使用得最多的不是点估计，而是下面研究的区间估计。

二、区间估计

既然点估计不能使母体待估参数的计算值完全与真值吻合，那么我们为了使计算值尽可能有把握地接近真值，即估值 $\hat{\theta}$ 和真值 θ 的误差不超过某一定值 δ 的概率不小于某一值 γ 。考虑理想边界状态，用数学式表达，即：

$$P(|\theta-\hat{\theta}|\le\delta)=\gamma$$

即

$$P\left(\left\lfloor(\hat{\theta}-\delta)\le\theta\le(\hat{\theta}+\delta)\right\rfloor\right)=\gamma$$

令 $\theta_L=\hat{\theta}-\delta \quad \theta_U=\hat{\theta}+\delta$

则有 $$P(\theta_L \le \theta \le \theta_U) = \gamma \qquad (9\text{-}3)$$

式中 θ_L ——置信下限；

θ_U ——置信上限；

γ ——置信度，也称置信概率

$\gamma = 1 - \alpha$ 其中 α 称为风险率或置信水平。

区间估计就是根据对子样的每个产品测得的值 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$，求某置信度 r 的置信上限 θ_U 和置信下限 θ_L 。

由于 θ_U 和 θ_L 分别都是子样 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ 的函数。因此 θ_U 和 θ_L 可能是离散型随机变量。当 θ_U 和 θ_L 是离散型随机变量时，式（9-3）就有可能不能实现，则应将其改写为：

$$P(\theta_L \le \theta \le \theta_U) \ge \gamma \qquad (9\text{-}4)$$

可见式（**9-3**）是符合 θ_U 和 θ_L 是连续型随机变量的情况。

对式（9-3）或式（9-4）使用的说明：

(1) $[\theta_L, \theta_U]$ 区间为真值所在的区间，算出的区间越小，说明对真值估计的越精，在计算方法和置信度相同的条件下，子样越大（即n越大），则置信区间越小，估计精度越高；

(2) r 反映真值 θ 落在 $[\theta_L, \theta_U]$ 区间的概率，r 越大，说明该区段估计的置信度（可信程度）越大；

(3) 区间估计的置信度和精确度是互相矛盾的两个侧面。当子样大小不变时，要求的置信度越高，置信区间越宽，估计精度越低。

因此区间估计的关键是在子样大小合理情况下，**协调地处理好置信度和精度的关系；**

(4) 式（9-3）或（9-4）均为双边估计的公式。

实际在工程中人们主要采用的是单边估计方法，因为大家主要关心的是产品**可靠性*R*的下**限或失效率的上限。

§9-3 常用失效分布类型单元产品的可靠性评估

众所周知，工程中常用的失效分布类型：成败型（二项分布），寿命型（一般为指数分布），性能和结构可靠性模型（正态分布）。下面介绍其单元产品的可靠性评估。

一、成败型单元产品的可靠性评估

有些产品只要求试验结果取两种对立状态，如成功或失效，合格或不合格，好或坏等，且各次试验结果彼此独立，这样的产品称为成为成败型产品，它用二项分布来描述。

设成败型产品的可靠性为 ***R***，不可靠性为 1 - *R*，某次试验结果X_i为一随机变量，仅取 **0** 和 **1** 两个值：

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{试验失败} \\ 1 & \text{试验成功} \end{cases}$$

设取子样产品数量为 n，若经试验后有 S 个成功。由概率论二项分布可知，n 次试验出现 S 次成功的概率 $L(R)$为：

$$L(R) = \binom{n}{s} R^S (1-R)^{n-s} \qquad (9-5)$$

1. 产品可靠性的点估计

(1)根据极大似然法

为求$L(R)$的极大点，需解：

$$\frac{dL(R)}{dR} = 0$$

因为 $\ln L(R)$ 是 $L(R)$ 单调函数

具有相同的极值点，为便于计算，改求下式：

$$\frac{d\ln L(R)}{dR} = 0$$

式(9-5) 可得：

$$\ln L(R) = \ln\binom{n}{s} + s\ln R + (n-s)\ln(1-R)$$

$$\frac{d\ln L(R)}{dR} = \frac{s}{n} - \frac{n-s}{1-R} = 0$$

可得 $\hat{R} = \dfrac{s}{n}$ （9－6）

(2) 用矩法解（概率论常用的求数学期望和方差的方法）可得：

$$\hat{R} = \frac{s}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{R}} = \frac{R(1 - R)}{n}$$

例 9-1 从某批继电器中随机抽取100件，进行启闭试验，其中有2件失效,试估算这批继电器可靠度的点估计值。

解：由式(9-6)可得：

$$\hat{R}=\frac{s}{n}=\frac{100-2}{100}=0.98$$

2. 产品可靠性的区间设计

(1) 单边估计

因估计的是可靠性，故求得是置信下限 R_L，应由式(9-4)可得：

$$P(R_L \le R \le 1) \ge \gamma$$

对二项分布，上式可表示为：

$$\sum_{x=0}^{F} \binom{n}{x} R_L^{n-x}(1-R_L)^x = 1-\gamma \qquad (9\text{-}7)$$

式中 F — n次试验的失败数，即 $F = n - s$；

γ —置信度。

可见已知 n, F, γ 可用式（9-7）求出R_L，但是这样计算R_L是十分复杂的，为了便于工程应用， 国家制定了有关表格(见**附表2二项分布可靠性单侧下限表**)，**用查表的方法求R_L**。

例 9-2 若有一批产品按GB2828规定抽100个作寿命试验，试验结束有3个失效，问该批产品$\gamma = 0.9$的可靠度下限是多少。

解： 根据 GAMMA = 0.9，$n = 100, F = 3$，

查附表2， $R_L = 0.9344$

则 $\boldsymbol{R \geqslant 0.9344}$

(2) 双边估计

和单边估计一样利用$P(R_L \le R \le R_U) = \gamma$。对二项分布，$R_L$和$R_U$可由以下方程组来确定：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{x=0}^{F} \binom{n}{x} R_L^{n-x} (1-R_L)^x = \frac{1-\gamma}{2} \\ \sum_{x=F}^{n} \binom{n}{x} R_U^{n-x} (1-R_U)^x = \frac{1-\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \quad (9-8)$$

给定 γ 后，可解式(9-8)的中R_L和R_U。但很麻烦，目前国家已制定了表格。可为了利用附表2，可将式(9-8)转化为以下形式：

$$\left.\begin{aligned}\sum_{x=0}^{F}\binom{n}{x}R_L^{n-x}(1-R_L)^x &= 1-\frac{1+\gamma}{2}\\ \sum_{x=0}^{F-1}\binom{n}{x}R_U^{n-x}(1-R_U)^x &= \frac{1+\gamma}{2}\end{aligned}\right\}\quad(9\text{-}9)$$

根据 $\dfrac{1+\gamma}{2}$ ，n，F 在“二项分布可靠性单侧下限表上（附表2）查得 R_L 。

根据 $\dfrac{1+\gamma}{2}$ ，n，F-1 值在“二项分布可靠性单侧上限表上（附表3）查得R_U。

例 9-3 产品$n = 100, F = 3$, 当$r = 0.8$，

求 R_L，R_U。

解 (1) 求 R_L

$$\because \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.8}{2} = 0.9, n = 100, F = 3$$

查附表2 得 $R_L = 0.9344$

(2) 求 R_U

$$\because \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.8}{2} = 0.9, n = 100, F - 1 = 2$$

查附表3 得 $R_U = 0.9947$

$$\therefore 0.9344 \le R \le 0.9947$$

二、单元产品性能可靠性评估

许多产品的性能参数可用正态分布函数描述，如性能指标、结构强度、耗损寿命等，其分布密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

式中　x----随机变量

μ，σ----性能参数总体的均值和标准差。

设产品某项性能指标：$X \sim N(\mu,\sigma)$

随机抽取n个进行试验，测得 $x_{1,} x_2, \ldots, x_n$,

则 X 在以 x_{i} 为中心的 Δx 内的概率为：

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \Delta x \qquad (9\text{-}10)$$

出现 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 的概率似然函数为：

$$L(\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2} . (\Delta x)^n$$

$$= \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]} \qquad (9\text{-}11)$$

1.单元产品性能指标的点估计

根据极大似然法求性能指标的$\hat{\mu}$和$\hat{\sigma}^2$。

由$\dfrac{\partial \ln(\mu,\sigma)}{\partial \mu}=0$及$\dfrac{\partial \ln(\mu,\sigma)}{\partial \sigma^2}=0$　　解得

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mu}&=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\\ \hat{\sigma}^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}12)$$

由于 $\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$分别是μ，σ^2的无偏估计，

而 $\hat{\sigma}$ 并非是 σ 的无偏估计，因此用 $\hat{\sigma}$ 去估计 σ ，应加修正系数C(见表9-1)，

$$\hat{\sigma}^* = \frac{1}{C}\hat{\sigma} \qquad (9\text{-}13)$$

表9—1 修偏系数

n	2	3	4	5	6	7	8	9
C	0.797 9	0.886 2	0.921 3	0.940 0	0.951 5	0.959 4	0.965 0	0.969 3
n	10	15	20	25	30	40	50	
C	0.972 7	0.982 3	0.986 8	0.989 6	0.991 4	0.993 6	0.994 9	

注： 建议在 $n \leqslant 20$ 时用 C 系数。

2. 单元产品性能指标的区间估计

(1) 大子样(一般***n* > 50**)

当 $\gamma = 1 - \alpha, \mu$ 的双侧置信下、上限（μ_L, μ_U）为

$$\left.\begin{aligned} \mu_L &= \hat{\mu} + \frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma} \\ \mu_U &= \hat{\mu} + \frac{U_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}14)$$

当 $\gamma = 1-\alpha, \sigma$ 的双侧置信下、上限（σ_L, σ_U）为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_L &= \hat{\sigma} + \frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}} \cdot \hat{\sigma} \\ \sigma_U &= \hat{\sigma} + \frac{U_{1-\alpha/2}}{\sqrt{2n}} \cdot \hat{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}15)$$

σ的单则置信上限σ_U为

$$\sigma_U = \hat{\sigma} + \frac{U_{1-\alpha}}{\sqrt{2n}} \cdot \hat{\sigma} \quad (9\text{-}16)$$

式中$U_{\alpha/2}, U_{1-\frac{\alpha}{2}}, U_{1-\alpha}$ 查附表1。

(2) 小子样(一般$n \leqslant 50$)

当 $\gamma = 1-\alpha$, μ 的双侧置信下、上限（μ_L, μ_U）为

$$\left.\begin{aligned} \mu_L &= \hat{\mu} + \frac{t_{\alpha/2}(\nu)}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma}^* \\ \mu_U &= \hat{\mu} + \frac{t_{1-\alpha/2}(\nu)}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma}^* \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}17)$$

当 $\gamma=1-\alpha,\sigma$ 的双侧置信下、上限（$\hat{\sigma}_L^2,\hat{\sigma}_U^2$）为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_L^2 &= \frac{\nu\hat{\sigma}^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)}\\ \sigma_U^2 &= \frac{\nu\hat{\sigma}^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(\nu)}\end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}18)$$

σ^2的单则置信上限σ_U^2为

$$\sigma_U^2 = \frac{\nu \hat{\sigma}^{*2}}{\chi_\alpha^2(\nu)} \qquad (9\text{-}19)$$

式中 $t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu), \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu), \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu),$

$\chi_\alpha^2(\nu)$和$\nu = n-1$

分别为t和χ^2分布的下则分位数。

查附表**4**和**5**。

例 9-4 某型号导弹试射8发，测得落点纵向偏差为：

+0.380, +0.404, +0.302, -0.203,

+0.450, -0.370, +0.580, +0.602 (km)。

此批数据符合正态分布，求落点纵向偏差的均值和标准差估计值，置信度为0.8。

解： (1) 点估计

由式(9-12)得：$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = +0.2681$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2} = 0.3360$$

$\because$ $n = 8$ (＜50)，$\therefore$ 要对 $\hat{\sigma}$ 修偏。

由表9-1得C=0.9650。根据式(9-13)得：

$$\hat{\sigma}^* = \frac{1}{C}\hat{\sigma} = \frac{1}{0.9650} \times 0.3360 = 0.3482$$

(2) 区间估计

因为 $n < 50$，所以用式(9-17)至式(9-19)。

由题意得自由度：$\nu = n-1 = 8-1 = 7$

置信度：$\gamma = 1-\alpha = 0.8$

风险率： $\alpha = 1-\gamma = 0.2$，$\alpha/2 = 0.1$，

$1-\alpha/2 = 0.9$。

查附表4得：$t_{\alpha/2}(\nu) = t_{0.1}(7) = -1.41492$

$t_{1-\alpha/2}(\nu) = t_{0.9}(7) = +1.41492$

查附表5得：$\chi^2_{1-\alpha/2}(\nu) = \chi^2_{0.9}(7) = 12.01704$

$\chi^2_{\alpha/2}(\nu) = \chi^2_{0.1}(7) = 2.83311$

$$\chi_{\alpha}^{2}(\nu) = \chi_{0.2}^{2}(7) = 3.82232$$

(3) 计算 μ 的双侧置信限

由式(9-17)得：

$$\mu_L = \hat{\mu} + \frac{t_{\alpha/2}(\nu)}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma}^* = 0.2681 - \frac{1.41492}{\sqrt{8}} \times 0.3482$$

$$= 0.09391(\text{km})$$

$$\mu_U = \hat{\mu} + \frac{t_{1-\alpha/2}(\nu)}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma}^* = 0.2681 + \frac{1.41492}{\sqrt{8}} \times 0.3482$$

$$= 0.44229(\text{km})$$

(4) 计算 σ 的单、双侧置信限

由式(9-18)得:

$$\sigma_L=\sqrt{\frac{\nu\hat{\sigma}^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(\nu)}}=\sqrt{\frac{7\times0.3482^2}{12.01704}}=0.26575(\mathrm{km})$$

$$\sigma_U=\sqrt{\frac{\nu\hat{\sigma}^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(\nu)}}=\sqrt{\frac{7\times0.3482^2}{2.83311}}=0.54733(\mathrm{km})$$

由式(9-19)得总体标准差单侧置信上限 σ_U 为:

$$\sigma_U=\sqrt{\frac{\nu\hat{\sigma}^{*2}}{\chi^2_{\alpha}(\nu)}}=\sqrt{\frac{7\times0.3482^2}{3.82232}}=0.47121(\mathrm{km})$$

中国可靠性网

http://www.kekaoxing.com

感谢 kingdodoo 分享