

文章编号 : 1000-4750(2006)04-0058-04

## 响应面法在结构体系可靠度分析中的应用

\*熊铁华<sup>1</sup>, 常晓林<sup>2</sup>

(1. 武汉大学土木建筑工程学院, 武汉 430072; 2. 武汉大学水利水电学院, 武汉 430072)

**摘 要:** 一个失效模式由许多的失效单元构成, 它是一个并联系统; 而所有的失效模式构成一个串联系统。整个结构体系可看成是许多并联系统(失效模式)组成的一个串联系统。首先, 利用基于响应面的随机有限元法来获得失效模式中各个单元的极限状态方程, 这些方程都是二次多项式; 第二步, 利用结构可靠度分析中的几何法得到这些方程的等效线性化方程从而可逐步得到该失效模式的等效线性化方程; 第三步, 计算各失效模式间的相关系数; 最后, 由 Ditlevsen 界限法来计算结构的体系可靠度。算例表明, 利用该方法来获得大型、复杂结构的体系可靠度具有高效、实用的特点。

**关键词:** 工程基础科学; 可靠性理论; 分析方法; 体系可靠度; 随机有限元法; 响应面法

**中图分类号:** TB114.3 **文献标识码:** A

### APPLICATION OF RESPONSE SURFACE METHOD IN SYSTEM RELIABILITY ANALYSIS

\*XIONG Tie-hua<sup>1</sup>, CHANG Xiao-lin<sup>2</sup>

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. School of Water Resources and Hydropower, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** A failure mode, which consists of failure elements, is considered as a parallel system. All failure modes form a series system. A structural system is modeled as a series system that consists of failure modes. In the first step, stochastic finite element method based on response surface is suggested to get a set of limit state functions of failure elements of a failure mode. All these functions are quadratic polynomial. In the second step, a set of equivalent linear equations for these functions is obtained by geometric method in structural reliability analysis and an equivalent linear equation of the failure mode is evaluated step by step. In the third step, the correlation coefficients between failure modes are evaluated., structural system reliability is computed by Ditlevsen bounds method. A numerical example shows that the suggested approach is efficient and applicable.

**Key words:** fundamental science of engineering; reliability theory; analytical methods; system reliability; stochastic FEM; respond surface method

体系可靠度研究的是多个功能函数的结构可靠度问题。近 20 年来, 随着有限元法、计算机技术和概率网络理论的发展, 结构体系可靠度理论得到很大的发展, 特别是在机械和电子方面, 体系可靠度理论已进入实用阶段<sup>[1,2,3]</sup>。然而在土木工程领域, 由于结构的荷载环境、结构的失效模式等问题

的复杂性, 结构体系可靠度理论至今仍基本上处于理论研究阶段。

一个结构总可以看成由若干失效模式组成, 而任一失效模式的发生都将导致结构的整体破坏。因此, 结构体系的失效概率由所有的失效模式决定, 结构体系可看成由失效模式组成的串联系统。同

收稿日期: 2004-05-08; 修改日期: 2004-11-06

作者简介: \*熊铁华(1968), 男, 湖北孝感市人, 副教授, 博士, 主要从事数值计算及非线性振动方面的研究(E-mail: thxiong@whu.edu.cn);

常晓林(1963), 男, 湖北随州市人, 教授, 博士, 从事高坝结构及复杂坝基研究。

时,对于某一失效模式而言,当失效模式中的所有单元全部失效时,该失效模式才会发生,因此,失效模式可看成是由失效单元组成的并联系统。从而,整个结构体系成为失效单元组成的并联子系统(失效模式)的串联系统。结构体系可靠度的计算问题也就成为并联系统或串联系统的可靠度计算。而并联系统失效概率的计算就是失效事件交集概率的计算,串联系统失效概率的计算就是失效事件并集概率的计算。

本文提出了用基于响应面的随机有限元法来获得失效模式上各个单元的极限状态方程,然后用逐步等效线性化法获得该失效模式的等效线性化极限状态方程。所有的失效模式组成一个串联系统,计算各失效模式间的相关系数,最后由Ditlevsen 界限法计算结构体系可靠度。

## 1 响应面法

响应面法是数学方法和统计方法结合的产物,用于处理复杂系统的输入与输出的转换关系问题。该方法采用有限的试验,通过回归拟合解析表达式 $\bar{Z} = \bar{g}(X)$ 代替真实曲面 $Z = g(X)$ ,可将功能函数近似地表示为随机变量的显式,以后再结合 JC 法、几何法等方法进行结构可靠度的计算。

对  $n$  个随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  情况,近似函数取为二次多项式形式<sup>[4]</sup>:

$$\bar{Z} = \bar{g}(X) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 \quad (1)$$

其中  $\beta_0, \beta_i, \beta_{ii} (i=1, 2, \dots, n)$  为待定参数。如果能恰当地利用实验设计来收集数据,就能够最有效地估计模型参数。拟合的响应面是否为真实曲面的较好近似,目前有两种判别方法<sup>[5]</sup>:一种是 Faravelli<sup>[6]</sup>提出的以实验设计为基础,应用  $2^n$  析因设计或中心复合设计( $2^{n-f} + 2n + 1$  次实验)回归得到待定因子的最小二乘估计,以误差分析为判别准则决定是否接受;另一种是应用 Bucher 和 Bourgund<sup>[7]</sup>建议的内插技术( $4n + 3$  次实验),以在近似验算点附近展开得到的响应面为准则。前一种方法当随机变量个数较大时,试验次数过多;第二种方法试验次数少,但得到的验算点是近似的。本论文将采用第一种方法来建立响应面。

## 2 串联系统可靠度的计算

对串联系统,系统中的任一元素失效都会导致

整个系统的失效,失效概率可写为

$$P_f = P_f \left( \bigcup_{i=1}^m g_i \leq 0 \right) = \int_F f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

式中: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  维联合概率密度函数。由于在结构体系元件较多的情况下,直接积分将十分复杂,因此往往采用近似的方法。

第一步近似是将原极限状态面用其线性化后的极限面代替:

$$\bar{g}_i(X) = \alpha_i^T X + b_i \quad (3)$$

式中: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为基本随机变量向量,其中  $n$  为随机变量数目; $\alpha_i$  和  $b_i$  为常系数列向量。系统的失效概率可近似写为

$$P_f \approx P_f \left( \bigcup_{i=1}^m \bar{g}_i \leq 0 \right) \quad (4)$$

第二步是对式(4)进行计算。Ditlevsen 提出了窄界限法<sup>[8]</sup>。当相关系数小于 0.6 时,窄界限法可以给出很窄的失效概率的范围。如无特殊需要,Ditlevsen 的窄界限法一般可以满足要求,且计算十分方便,因而得到广泛地应用。

## 3 并联系统可靠度的计算

并联系统中,只有当系统的所有元素全部失效时系统才会失效,失效概率为

$$P_f = P_f \left( \bigcap_{i=1}^m g_i \leq 0 \right) = \int_F f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (5)$$

式中: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  维联合概率密度函数。与串联系统类似,由于在结构体系元件较多的情况下,直接积分将十分复杂,因此往往采用近似的方法。

### 3.1 单元功能函数的线性化

单元极限状态方程为  $g_i(X) = 0 (i=1, 2, \dots, m)$ ,将  $X$  转化为相互独立的随机变量  $Y$  后,成为  $G_i(Y) = 0$ 。将  $G_i(Y)$  在设计验算点  $Y^*$  处 Taylor 展开,并取至一次项,得功能函数的线性化方程

$$(Y - Y^*)^T \nabla G_i(Y^*) = 0 \quad (6)$$

式中: $\nabla G_i(Y^*) = \left( \frac{\partial G_i}{\partial Y_1}, \frac{\partial G_i}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial G_i}{\partial Y_n} \right)^T \Big|_{Y=Y^*}$ 。设计验算点须由迭代计算获得,求出  $Y^*$  后,原点到  $Y^*$  处

极限状态方程切平面的距离就是单元  $i$  的可靠度指标  $\beta_i$

$$\beta_i = -\frac{\mathbf{Y}^{*T} \nabla G_i(\mathbf{Y}^*)}{\|\nabla G_i(\mathbf{Y}^*)\|} \quad (7)$$

令  $\alpha_i = \frac{\nabla G_i(\mathbf{Y}^*)}{\|\nabla G_i(\mathbf{Y}^*)\|}$  , 由式(6)、(7)可得到单元  $i$

的线性化极限状态方程

$$\bar{G}_i(\mathbf{Y}) = \alpha_i^T \mathbf{Y} + \beta_i = 0 \quad (8)$$

### 3.2 逐步等效线性化 Johnson 求交法

并联系统失效概率的计算就是失效事件交集概率的计算, 近似的方法的思想是:  $m$  个失效事件的交集的计算, 可通过逐步等效线性化的方法近似获得, 即先将第 1 和第 2 失效事件交集的失效边界等效线性化, 然后计算等效线性化后的失效事件与第 3 失效事件的交集, 依此类推.....。因此, 按此法始终只需考虑两个失效事件交集的情况。具体步骤参见文献[9]。

### 3.3 基于响应面法的并联系统可靠度计算

要计算整个结构的可靠度, 就需要得到每个失效模式的等效线性化极限状态方程。利用响应面法来获得大型、复杂结构的任一失效模式的等效线性化极限状态方程, 具有高效, 方便的特点。如前所述, 任一失效模式可看成是由失效单元组成的并联系统, 基于响应面法的并联系统可靠度计算的步骤如下:

假设输入随机变量为  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  , 某一失效模式中单元数为  $m$  个。

(1) 利用响应面法  $2^{n-f} + 2n + 1$  次(中心复合设计)调用有限元程序, 构造出每个单元的功能函数:

$$g_i(\mathbf{X}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

(2) 利用结构可靠度分析中的几何法<sup>[10]</sup>得到该失效模式中各单元的可靠度指标及各单元的等效线性化极限状态方程

$$\bar{G}_i(\mathbf{Y}) = \alpha_i^T \mathbf{Y} + \beta_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

(3) 利用等效线性化 Johnson 求交法, 获得该失效模式中  $m$  个单元的等效线性化极限状态方程

$$G_E(\mathbf{Y}) = \alpha_E^T \mathbf{Y} + \beta_p$$

式中  $\beta_p$  就是该失效模式的可靠度指标。

## 4 已知失效模式时的可靠度计算

在有些情况下, 结构的失效模式是已知的, 例如碾压混凝土重力坝, 由于采用了特殊的施工工艺, 使碾压混凝土坝具有许多强度较低的层面, 这些层面降低了碾压混凝土坝的抗滑稳定性, 每个层

面都是可能的控制面。因此, 碾压混凝土重力坝的主要失效模式应包括这些层面以及建基面。如果结构的失效模式已知, 那么结构可靠度计算的步骤为:

(1) 利用前述的基于响应面法的并联系统可靠度计算方法, 获得每一个失效模式的等效线性化极限状态方程;

(2) 计算各个失效模式间的相关系数, 方法是:

$$\rho_{12} = \sum_{i=1}^n \alpha_{E1i} \alpha_{E2i} \quad (9)$$

(3) 利用串联系统可靠度计算方法(窄界限法), 得到结构体系可靠度。

## 5 已知失效模式时的可靠度计算算例

一典型碾压混凝土重力坝如图 1 所示, 坝高 145m, 坝基范围取上、下游均为 2 倍坝高。以水平 238(建基面)、244(RCD 层面)、272(RCC 层面)为主要失效模式来计算结构的体系可靠度。

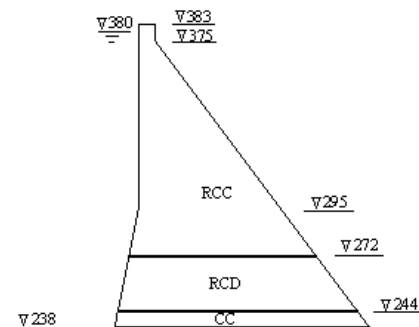


图 1 重力坝

Fig.1 Gravity dam

表 1 弹性模量统计量

Table 1 Elastic module statistical data

项目	RCC、RCD	CC	RCC	RCD	建基面	地基岩石
	本体	本体	层面	层面		
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
均值	1.4	2.24	0.7	1.25	1.4	3.0
变异系数	0.18	0.22	0.26	0.22	0.18	0.24
分布	N	N	N	N	N	N

注: 弹性模量单位( $10^4$ MPa); N 表示正态分布

### 5.1 参数选取

进行正常工况的计算, 基本组合为: 自重+水压力+扬压力+泥沙压力。上游水位高程 380m, 下游水位高程 265.8m。泥沙浮容重为  $10.5\text{kN/m}^3$ , 内摩擦角为  $18^\circ$ , 坝前淤沙高程 310m。扬压力系数  $\alpha_1 = 0.2$ 、 $\alpha_2 = 0.5$ 。

下游水位及泥沙压力、扬压力不作为随机变量。上游水位 142m, 变异系数 0.05, 其它随机变量统计结果如表 1 及表 2 所示。

表 2 抗力参数的统计量

Table 2 Resisting force statistical data

项目	RCC 层面		RCD 层面		建基面	
	$c_3$	$f_3$	$c_4$	$f_4$	$c_5$	$f_5$
均值	1.08	2.06	1.0	1.94	1.03	2.39
变异系数	0.24	0.18	0.26	0.20	0.23	0.19
分布	N	LN	N	LN	N	LN

注:  $c$  为抗剪断粘聚力, 单位(MPa);  $f$  为摩擦因数; LN 表示对数正态分布

5.2 基于响应面的随机有限元法的可靠度计算成果

下面以 238 水平层为例说明计算过程:

1、基于以下的 Mohr - Coulomb 准则构造该层中各单元的极限状态方程

$$G(x) = 2c \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - (\sigma_1 - \sigma_3) = 0$$

式中:  $c$ 、 $\phi$  分别为材料的抗剪断粘聚力和内摩擦角,  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  分别为单元的第一、第三主应力。

用响应面法来构造单元的极限状态方程, 238 水平有 15 个单元, 因此可得到 15 个形如式(1)的极限状态方程。

2、利用结构可靠度分析中的几何法得到该层中各单元的可靠度指标及各单元的等效线性化极限状态方程

$$\bar{G}_i(Y) = \alpha_i^T Y + \beta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 15)$$

3、利用等效线性化 Johnson 求交法, 获得该夹层中 15 个单元的等效线性化极限状态方程

$$G_E(Y) = \alpha^T E Y + \beta_p$$

式中  $\beta_p$  就是该层面的可靠度指标。

由以上的计算过程, 可得到 238、244、272 水平的等效线性化极限状态方程

$$G_E^{(238)} = -0.2029 E_1 + 0.0236 E_2 - 0.0026 E_3 - 0.0006 E_4 + 0.2222 E_5 + 0.1345 E_6 - 0.1127 H - 0.2528 f_5 + 0.9023 c_5 + 6.3866$$

$$G_E^{(244)} = -0.1383 E_1 + 0.0360 E_2 - 0.0024 E_3 + 0.2398 E_4 + 0.0020 E_5 - 0.0804 E_6 - 0.3074 H - 0.1903 f_4 + 0.8859 c_4 + 4.8615$$

$$G_E^{(272)} = -0.0489 E_1 - 0.0044 E_2 + 0.2004 E_3 - 0.0003 E_4 - 0.0004 E_5 - 0.0500 E_6 - 0.3569 H - 0.2602 f_3 + 0.8717 c_3 + 5.4456$$

由式(9)可得到以上三个方程间的相关系数:

$\rho_{12} = 0.0530$ 、 $\rho_{13} = 0.1198$ 、 $\rho_{23} = 0.042$ , 可以看出, 由于没有考虑各层的抗剪断摩擦因数  $f$  和抗剪

断粘聚力  $c$  之间的相关性, 使得各层功能函数之间的相关性几乎为 0, 从而由 Ditlevsen 界限法得到的由这三个层面组成的体系的失效概率的上下界限相同, 为  $P_f = 6.0840e - 007$ , 对应的体系可靠度指标为 4.8529。

6 结束语

本文提出了用基于响应面的随机有限元法来获得失效模式上各个单元的极限状态方程, 然后用逐步等效线性化法获得该失效模式的等效线性化极限状态方程。重复这个过程, 即可得到所有失效模式的等效线性化极限状态方程。所有的失效模式组成一个串系统, 最后由 Ditlevsen 界限法计算体系可靠度。算例表明, 利用该方法来获得大型、复杂结构的体系可靠度, 具有高效, 方便的特点。

参考文献:

[1] Moses F. System reliability developments in structural engineering [J]. Structural Safety, 1982, 1(1): 3~13.  
 [2] Throft-Christensen P, Murotsu Y. Application of structural systems reliability theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.  
 [3] 董聪, 夏人伟. 现代结构系统可靠性评估理论研究进展[J]. 力学进展, 1995, 25(4): 537~548.  
 Dong Cong, Xia Renwei. Advances in the modern reliability evaluation theory of structural systems [J]. Advances in Mechanics, 1995, 25(4): 537~548. (in Chinese)  
 [4] Rajashekhar M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis [J]. Structural Safety, 1993, 12(3): 205~220.  
 [5] 佟晓利, 赵国藩. 一种与结构可靠度分析几何法相结合的响应面方法[J]. 土木工程学报, 1997, 30(4): 51~57.  
 Tong Xiaoli, Zhao Guofan. The response surface method in conjunction with geometric method in structural reliability analysis [J]. China Civil Engineering Journal, 1997, 30(4): 51~57. (in Chinese)  
 [6] Faravelli L. A response surface approach for reliability analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(12): 2763~2781.  
 [7] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems [J]. Structural Safety, 1990, 7(1): 57~66.  
 [8] Ditlevsen O. Narrow reliability bounds for structural system [J]. Journal of Structural Mechanics, 1979, 7(4): 453~472.  
 [9] 刘宁, 李同春. 用三维随机有限元寻求结构的最大可能失效模式[J]. 水利学报, 1996, 3: 36~43.  
 Liu Ning, Li Tongchun. A method for searching the most probable failure mode by on 3-D SFEM [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1996, 3: 36~43. (in Chinese)  
 [10] 吕泰仁, 吴世伟. 用几何法求构件的可靠指标[J]. 河海大学学报, 1988, 16(5): 86~93.  
 Lu Tairen, Wu Shiwei. Evaluating element reliability index by geometric method [J]. Journal of Hohai University, 1988, 16(5): 86~93. (in Chinese)