第 26 卷 第 4 期　北 京 理 工 大 学 学 报　Vol. 26 No. 4
2006 年 4 月　Transactions of Beijing Institute of Technology　Apr. 2006

文章编号:1001-0645(2006)04-0305-04

基于有限元法的结构可靠度分析优化算法的实现

程颖， 涂宏茂， 樊红丽
(北京理工大学 机械与车辆工程学院，北京 100081)

摘　要: 为快速、高效地进行基于随机有限元法的结构可靠度分析，从结构可靠性指标的几何意义出发，提出了在 ANSYS 平台上采用有限元法和梯度优化算法相结合的方法进行可靠度分析的构想，对 ANSYS 进行二次开发实现了该方法. 算例结果表明，该方法与 Monte-Carlo 法的计算精度基本一致，但需要的计算量比验算点法还要少. 因而，该方法能用较少的有限元计算次数得到较精确的可靠度和验算点值.

关键词: 结构可靠度; 优化算法; ANSYS; 随机有限元法
中图分类号: TH 122　**文献标识码**: A

Implementation of An Optimum Algorithm for Structural Reliability Analysis Based on FEM

CHENG Ying, TU Hong-mao, FAN Hong-li
(School of Mechanical and Vehicular Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In order to analyse the structural reliability by stochastic finite element method rapidly and efficiently, a method combined with finite element method and gradient optimum algorithm based on ANSYS is presented when referring to the geometric interpretation of structural reliability index. ANSYS-based development is adopted to implement it. Results of an example demonstrate that it requires fewer FE calculations with this method compared with the design point method and Monte-Carlo simulation, achieving satisfactory accuracy.

Key words: structural reliability; optimum algorithm; ANSYS; stochastic finite element method

目前，结构可靠度分析大多采用近似算法，主要有:Rosenblueth 点估计法、JC 法、Monte-Carlo 法、响应面法以及优化算法(亦称几何法). Rosenblueth 点估计法计算简便，无需进行迭代计算，但在非线性正态随机变量的情况下精度较低[1];JC 法迭代次数较多，而且当极限状态方程为高次非线性方程时，误差较大;Monte-Carlo 法虽然可以克服这个缺点，但计算工作量大;响应面法无论对于线性还是非线性功能函数，都具有较高精度，但计算效率随着随机变量的增加而显著降低[2];而用优化算法计算可靠性指标，则可以在几轮迭代计算之后，得到令人满意的精度.

作者提出了在 ANSYS 中采用梯度优化算法和有限元法相结合的方法进行结构可靠度分析的构想，基于 ANSYS 软件进行二次开发，实现了结构可靠度分析.

1　结构可靠性指标及其几何意义

设结构的功能函数为

$$Z = g(X) = g(X_1, X_2, \cdots, X_n), \qquad (1)$$

收稿日期: 2005-07-14
作者简介: 程颖(1964-)，女，博士，副教授，E-mail: chengy@bit.edu.cn.

式中：$X_i(i=1,2,\cdots,n)$为结构的基本随机变量，可以是荷载、几何尺寸或材料特性参数等. 对应的，结构的极限状态方程为

$$Z=g(X)=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0. \quad (2)$$

目前工程上较多采用可靠性指标 $\beta=\mu_Z/\sigma_Z$ 度量结构的可靠度，其中 μ_Z 和 σ_Z 分别为功能函数 Z 的均值和标准差. 如果功能函数 Z 服从正态分布，则失效概率 $P_f=\Phi(-\beta)$，其中 $\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数.

结构可靠性指标 β 的几何意义是：在标准正态坐标系中，从原点到极限状态曲面 $Z=0$ 的最短距离. 于是，β 的计算可以转化为求这个最短距离的问题[3].

2 优化算法

2.1 结构可靠性指标的优化算法

为简便起见，设基本随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$相互独立且服从正态分布，同时，引入标准化正态随机变量 Y，使得

$$Y_i=(X_i-\mu_{X_i})/\sigma_{X_i},\ (i=1,2,\cdots,n) \quad (3)$$

式中 μ_{X_i} 和 σ_{X_i} 分别为随机变量 X_i 的均值和标准差.

于是，结构功能函数可以转换到标准正态空间，即可表示为

$$Z=g(X)=g(T^{-1}(Y-B))=G(Y), \quad (4)$$

式中：$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^T$ 为一组相互独立的标准正态变量，$Y=TX+B$；T 为转换矩阵；B 为常数向量. T 和 B 皆可由式(3)推导得到.

根据结构可靠性指标 β 的几何含义，可靠性指标的获得就是在功能函数面 $G(Y)$ 上寻找一个点 $Y^*=(Y_1^*,Y_2^*,\cdots,Y_n^*)^T$ 使该点与坐标原点的距离最短，由此可以得到可靠性指标计算的优化模型

$$\begin{cases}\beta=\min\sqrt{(Y^*)^TY^*}, & \text{目标函数}\\ G(Y^*)=0. & \text{约束条件}\end{cases} \quad (5)$$

求解这一优化问题的方法很多[4-5]，其中较为简便且高效的一种方法是梯度优化算法. 其采用如下的显式迭代计算格式计算得到验算点 Y^*，

$$Y_{j+1}=\left(Y_j^T\alpha_j+\frac{G(Y_j)}{|\nabla G(Y_j)|}\right)\alpha_j. \quad (6)$$

式中：Y_j 表示 j 第次迭代计算的验算点；$\nabla G(Y_j)=\left(\frac{\partial G(Y_j)}{\partial Y_1},\frac{\partial G(Y_j)}{\partial Y_2},\cdots,\frac{\partial G(Y_j)}{\partial Y_n}\right)^T$ 是 $G(Y_j)$ 的梯度向量；$\alpha_j=-\frac{\nabla G(Y_j)}{|\nabla G(Y_j)|}$ 是沿负梯度方向的单位向量，它垂直于极限状态面，其指向背离坐标原点[6].

经过几个循环的迭代，序列 Y_j 逐渐收敛于极限状态面上距离最近的点，即设计验算点 Y^*，再根据公式 $\beta=\sqrt{(Y^*)^TY^*}$ 得到结构的可靠性指标.

2.2 基于有限元的可靠性指标求解

在采用随机有限元方法进行结构可靠度分析时，结构功能函数 $G(Y)$ 是通过有限元构造的隐式函数，则它的梯度向量可以表示为

$$\nabla G(Y)=\left(\frac{\partial G(Y)}{\partial Y_1},\frac{\partial G(Y)}{\partial Y_2},\cdots,\frac{\partial G(Y)}{\partial Y_n}\right)^T=T^{-1}\nabla g(X). \quad (7)$$

考虑到结构的功能函数是建立在结构力学特性的基础上，因此通常可以把构成功能函数的各随机变量分为与结构抗力相关和与荷载效应相关两大类. 以 $R=(R_1,R_2,\cdots,R_k)^T$ 表示与结构抗力有关的随机变量，以 $S=(S_1,S_2,\cdots,S_l)^T$ 表示与荷载效应有关的随机变量，其中 $k+l=n$. 于是，结构的功能函数 $g(X)$ 可以写成 $g(R,S)$，所以，可将式(7)表达为

$$\nabla G(Y)=T^{-1}\nabla g(R,S)=T^{-1}[J_R\nabla g_R(R,S)+J_s\nabla g_s(R,S)]. \quad (8)$$

式中：$\nabla g_R(R,S)$和$\nabla g_s(R,S)$分别为功能函数对 R 和 S 的梯度向量；$J_R=\partial R/\partial X$和$J_s=\partial S/\partial X$分别为变换 $R=R(X)$和 $S=S(X)$的雅可比矩阵.

一般来说，梯度向量$\nabla g_R(R,S)$和$\nabla g_s(R,S)$比较容易求出，而 R 可以表达为基本变量的显式函数，故其雅可比矩阵 J_R 也容易求出. 但是荷载效应 S 一般不能表示为基本变量的显式函数，而要求由载荷效应与结构位移反应的关系给出，所以 J_s 的求解较难.

对于线弹性结构，可以用下述方法求解 J_s，求解步骤如下.

①在静力问题中用有限元法建立的平衡方程表示为

$$KU=F. \quad (9)$$

式中：K 为整体刚度矩阵；F 为整体节点荷载向量；U 为整体节点位移向量. 它们都是基本变量 X 的函数.

②将单元应力 σ^e 作为结构的荷载效应，其表达式为

$$\sigma^e = DBU^e. \tag{10}$$

式中: D 为弹性矩阵; B 为几何矩阵; U^e 为单元节点位移向量,可以由结构整体位移向量 U 获得.

③对式(9)和式(10)进行关于随机变量的偏导数求解,得到

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = K^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i}U\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial \sigma^e}{\partial X_i} = \frac{\partial D}{\partial X_i}BU^e + DB\frac{\partial U^e}{\partial X_i}. \tag{12}$$

因此,在求得$\partial\sigma^e/\partial X_i$后即可以得到 J_s,最后再根据式(5)(6)进行计算,得到结构可靠性指标和验算点值.

3　优化算法在 ANSYS 上的实现

通常情况下,结构的弹性参数(弹性模量和泊松比)和尺寸参数波动较小,所以可以忽略其随机性,即有$\partial D/\partial X_i = 0$和$\partial K/\partial X_i = 0$. 此时,由式(11)(12)可以得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial X_i} = K^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial X_i}, \\ \dfrac{\partial \sigma^e}{\partial X_i} = DB\dfrac{\partial U^e}{\partial X_i}. \end{cases} \tag{13}$$

式中$\partial F/\partial X_i$的求解可以采用数值微分方法或直接求导,本文中主要考虑 F 为随机变量显式函数的情况,故采用直接求导的方法.

根据上述结构可靠度的求解方法,基于通用有限元软件 ANSYS,采用参数化设计语言 APDL 实现结构可靠度分析的梯度优化算法. 利用 APDL 编制各个模块的宏文件(*.mac)供 ANSYS 的主程序调用,从而实现可靠度分析过程的自动化,整个流程如图 1 所示.

针对不同的可靠度求解问题,需要调用不同的 modeling.mac 或者用户自己建立有限元模型,然后根据具体荷载函数修改 diff.mac 中的部分代码,就可以进行结构可靠度计算.

作者在计算结构可靠性指标时,假设各随机变量都是独立的正态随机变量,但是在工程实际中,各随机变量往往是相关的并且不服从正态分布. 对于不服从正态分布的情况,可以将非正态变量转换为等效正态分布变量;对于随机变量统计相关的情况,可以将它们转换为相互独立的变量. 而在实现该算法时,只需要在求解$\partial F/\partial X_i$之前进行随机变量独立变换和等效正态分布转换即可.

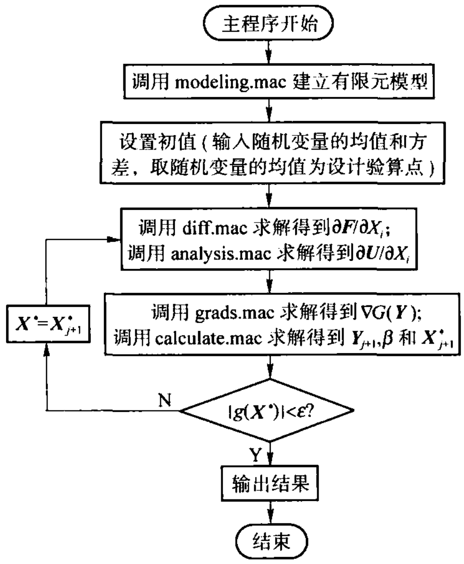

图 1　用 ANSYS 实现可靠度分析优化算法

Fig. 1　Implementation of an optimum algorithm for reliability analysis with ANSYS

4　算　例

以一个二级直齿圆柱齿轮减速器为例计算小齿轮的可靠度. 该减速器由电机驱动,载荷平稳. 低速级传递功率 P_1 = 34.2 kW,小齿轮转速 n_1 = 243.2 r/min,传动比 i = 4,齿数比 u = 3.5,变位系数 x = 0.4,单向工作,每天工作 12 h,工作寿命5 a. 小齿轮材料为 40Cr,表面淬火,硬度 48-55HRC. 小齿轮齿数 z_1 = 21,齿宽 b_1 = 63 mm,模数 m = 5,精度 8 级,其有限元模型如图 2 所示.

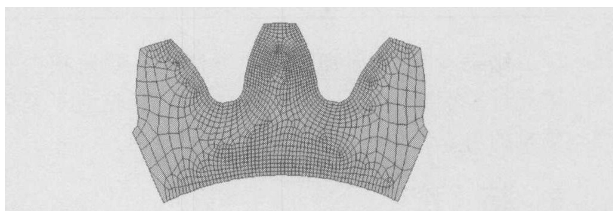

图 2　齿轮有限元模型

Fig. 2　Finite element model of gear

算例中随机变量统计特征如表 1 所示.

表 1　随机变量的统计特性

Tab. 1　Statistical property of random variables

类别	P_1/kW	n_1/(r·min^{-1})	σ_L/(N·mm^{-2})
均值	34.2	243.2	340
标准差	2.928	20.6	30

功能函数取为 $Z = g(X) = g(X_1, X_2, X_3) = g(P_1, n_1, \sigma_L) = \sigma_L - \sigma_1$，取 $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left\{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right\}^{1/2}$，其中 σ_x，σ_y 和 τ_{xy} 分别为单元 x 方向和 y 方向的正应力及 xy 方向的切应力. 当 $g(X) \geq 0$ 时，结构安全；$g(X) < 0$ 时，结构不安全. 因此，齿轮弯曲强度可靠性即是 $g(X) \geq 0$ 的概率.

结构可靠性指标的优化模型表示为

$$\begin{cases} \min\beta = \left(\sum_{i=1}^{3} Y_i^2\right)^{1/2}, \\ \text{s.t.}\ Z = g(X) = g(X_1, X_2, X_3) = \\ \qquad g(P_1, n_1, \sigma_L) = 0, \\ Y_i = (X_i - \mu_{X_i}) / \sigma_{X_i}. \\ \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

式中 μ_{X_i} 和 σ_{X_i} 分别为随机变量的均值和标准差.

最后，利用图 1 所示的基本流程编制程序，对齿轮做可靠度分析，计算结果如表 2 所示.

表 2　不同方法的计算结果

Tab. 2　Results with different methods

计算方法	可靠性指标	可靠度/%	验算点	有限元计算次数
Monte-Carlo	2.405 8	99.191 2		1 000
验算点法	2.342 1	99.041 0	(37.543 9, 214.381 2, 295.189 5)	56
梯度优化法	2.346 8	99.053 7	(37.545 4, 214.271 5, 295.200 6)	14

结果表明，采用梯度优化方法能有效地减少有限元计算次数，并且计算精度也比较高，这对于复杂结构的可靠度分析具有重要的实用价值.

5　结　论

采用梯度优化法和有限元法相结合的方法求解结构可靠度，可以用较少的迭代次数，计算得到比较精确的可靠性指标和验算点值，计算效率高. 同时，采用 ANSYS 的二次开发语言实现了这一方法，并通过算例验证了该方法的可行性和高效性.

参考文献：

[1] 张广文，陈祖煜. Rosenblueth 点估计法的探讨及其在工程结构可靠度分析中的应用[C] ∥工程结构可靠性全国第三届学术交流会议论文集. 南京：河海大学出版社，1992：52 - 58.
Zhang Guangwen, Chen Zuyu. Discussion about Rosenblueth method and its application in engineering structural reliability[C] ∥Symposium of 3th National Engineering Structural Reliability Conference. Nanjing: Hehai University Press, 1992: 52 - 58. (in Chinese)

[2] 刘宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用[M]. 北京：中国水利水电出版社，2001.
Liu Ning. Structural reliability analysis based on stochastic finite element method and its application on engineering [M]. Beijing: China Waterpower Press, 2001. (in Chinese)

[3] 禹智涛，韩大建. 结构可靠度分析的优化算法[J]. 华南理工大学学报：自然科学版，2003，31(4)：82 - 84.
Yu Zhitao, Han Dajian. An optimum algorithm for structural reliability analysis [J]. Journal of South University of Technology: Natural Science ed, 2003, 31(4): 82 - 84. (in Chinese)

[4] Madsen H O, Krenk S, Lind N C. Methods of structural safety[M]. New York: Spring Verlag, 1986.

[5] 马洪波，陈建军，马芳，等. 遗传算法在随机参数刚架结构概率优化设计中的应用[J]. 计算力学学报，2004，21(4)：487 - 492.
Ma Hongbo, Chen Jianjun, Ma Fang, et al. Application of genetic algorithm in optimization design for random parameters rigid frame structures [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2004, 21(4): 487 - 492. (in Chinese)

[6] 武清玺. 结构可靠性分析及随机有限元法[M]. 北京：机械工业出版社，2005.
Wu Qingxi. Structural reliability analysis and stochastic finite element method [M]. Beijing: China Machine Press, 2005. (in Chinese)

(责任编辑：李玉丹)