

文章编号 :0559-9350(2006)08-0985-06

基于马氏链样本模拟的渡槽结构系统可靠度分析

吴剑国^{1,2}, 金伟良², 张爱晖², 王盛²

(1. 浙江工业大学 建筑工程学院,浙江 杭州 310014; 2. 浙江大学 建筑工程学院,浙江 杭州 310027)

摘要:提出了一种适合于渡槽结构系统可靠度计算的重要样本法。该方法根据 Metropolis 准则构造马尔可夫链模拟样本,通过在失效域中进行预抽样,获得对失效概率的计算贡献较大的重要区域的分布信息,然后利用此信息构造重要样本函数,采用重要样本技术计算结构系统的失效概率。对一典型梁式渡槽进行各种失效模式的分析,建立了相应的功能函数,并就本文算法与已有算法计算得的可靠度进行了比较。结果表明,该方法由于不涉及设计点的概念,解决了应用重要样本法计算系统可靠性时重要样本函数构造的难题,具有较好的效率和精度。

关键词:结构系统可靠度;重要样本法;Metropolis 准则;马尔可夫链模拟;梁式渡槽;失效模式

中图分类号:TV672.3;TV31

文献标识码:A

渡槽结构是长距离跨流域调水工程中的常用结构^[1]。渡槽结构或构件一旦超过承载能力极限状态,将造成失效或结构失稳,后果十分严重^[2]。渡槽结构的失效可能存在于槽身,也可能存在于支承结构(排架)或基础,由于荷载和抗力的变异性,因而有必要对此类结构进行系统可靠度分析。重要样本法(Important Sampling)是结构可靠性分析中有效的数值模拟方法之一,对于单失效模式问题,在满足一定精度的条件下,充分抽样即可获得令人满意的结果。而对于系统可靠性问题,由于存在多个失效模式,因而会出现多个设计点,此时的重要样本法必须先找出所有的设计点,然后在各个设计点附近进行加权重要抽样,从而得到系统的失效概率。然而,当系统的变量维数较大,或者存在噪声极限状态方程,以及极限状态方程附近的概率密度函数相对较平坦或者凹凸很剧烈时,寻找设计点会变得十分困难,并将花费大量的计算机时,且权重的确定也颇为困难,人为因素较多。若设计点和权重选择不当,则利用重要样本法所得到的估计的方差很大,或者根本不切实际^[3,4]。为此,本文采用一个新的方法来克服这一缺点,此方法基于高效的马尔可夫链样本模拟算法^[5]来构造模拟样本,而此样本将根据最优抽样密度函数自适应地得到失效概率的重要区域,即通过在失效域中进行预抽样,获得对失效概率 P_f 贡献较大的重要区域的分布信息,然后再利用重要抽样技术计算结构系统的失效概率 P_f 。本文将分析梁式渡槽的各种失效模式和渡槽结构荷载和抗力的不确定性,建立相应的极限状态方程,并对某梁式渡槽的结构系统进行可靠度分析。

1 重要样本法

采用重要样本法的工程结构的失效概率可以表示为

$$P_f = \int_{D_f} f(X) dX = \int_D I(X) f(X) dX = \int_D I(X) \frac{f(X)}{h(X)} h(X) dX \quad (1)$$

收稿日期:2005-09-27

基金项目:水利部重点创新项目资助(SCX2002-09)

作者简介:吴剑国(1963-),江苏镇江人,博士,教授,主要研究方向为结构可靠性、结构优化设计和结构分析。

E-mail:wujg63@163.com

式中: X 为系统的 n 维基本随机变量, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, D 为 x 所可能的取值范围, $D \subset R^n$; D_f 为失效域, $D_f \subset D$; $f(X)$ 为基本随机变量 X 的联合概率密度函数 PDF, $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $I(X)$ 为指示函数, 当极限状态函数 $G(X) < 0$ 时, $I(X) = 1$, 意味着结构发生失效, 反之, $I(X) = 0$, 结构处于安全; $h(X)$ 为重要抽样密度函数。

于是, 式(1)的无偏估计为

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i) \frac{f(X_i)}{h(X_i)} \quad (2)$$

式中: X_i 为取自于抽样密度函数 $h(X)$ 的样本向量。

P_f 的方差估计值为

$$\text{Var}(P_f) = \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^2(X_i) \frac{f^2(X_i)}{h^2(X_i)} - P_f^2 \right\} \quad (3)$$

当抽样密度函数为

$$h(X) = \frac{f(X)}{\int_{D_f} f(X) dX} = \frac{f(X)}{P_f} \quad (X \in D_f) \quad (4)$$

时, 式(3)的模拟方差为最小, 此时的 $h(X)$ 即为最优抽样密度函数 $h_{\text{opt}}(X)$ 。

实际上, 抽样密度函数 $h(X)$ 的选取是非常困难的, 它取决于随机变量的分布形式、极限状态函数和抽样模拟精度等。对于单个失效模式, 通常的做法是选取 n 维独立正态分布的概率密度函数或与 $f(X)$ 相同形式的密度函数来充当统一的重要抽样密度函数, 并以设计点为中心进行模拟抽样, 计算结构的失效概率。设计点或最可能失效点通常是失效面上的最大失效概率点, 因而在设计点附近抽样可提高抽样效率, 并获得良好的结果。但由于结构系统存在多个设计点, 变量维数通常更多, 失效域形状更复杂, 设计点方法不能很好的描述概率重要区域, 需要寻找新的方法。

2 马尔可夫链样本模拟

马尔可夫链样本模拟是由马尔可夫链(亦可称为马氏链)的状态模拟样本点^[5], 并根据 Metropolis 接受准则^[6]进行状态空间的连续扩展, 当马尔可夫链的转移步数(即步长) M 趋向于无穷时, 这些模拟样本点的联合概率密度函数趋于最优重要抽样密度函数, 同时也自适应地得到了对失效概率 P_f 贡献较大的重要区域的分布信息。

2.1 样本模拟过程 首先选取一个概率密度函数 $f^*(X)$, 对于给定的一个 X , $f^*(X)$ 是以 X 为中心的分布概率密度函数。 $f^*(X)$ 具有对称性, 即 $\forall X \in D, f^*(X) = f^*(|X|)$ 。为方便起见, 令 $q(X) = I(X)f(X)$, $I(X)$ 为指示函数, 则马尔可夫链模拟样本 $X^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, M$) 由下列步骤产生: (1) 在失效域内随机地或确定性地选取一点 $X^{(0)}$ 作为马氏链的初始状态; (2) 假定马氏链处于状态 $X^{(j)}$, 下一状态点 根据概率密度函数 $f^*(X^{(j)})$ 由舍选法产生, 并计算 $r = q(X^{(j)})/q(X^{(j)})$; (3) 根据 Metropolis 接受准则^[6]决定马氏链的下一状态点。即如果 $r \geq 1$, 则以 $X^{(j)}$ 作为 $(j+1)$ th 状态, 即 $X^{(j+1)} = X^{(j)}$; 如果 $r < 1$, 则以 $X^{(j)}$ 为具有概率 r 的 $(j+1)$ th 状态, $X^{(j)}$ 为具有剩余概率 $1-r$ 的 $(j+1)$ th 状态, 从 $[0, 1]$ 均匀分布抽取一个随机数 u , 如果 $r > u$, 则以 $X^{(j)}$ 为 $(j+1)$ th 状态; 否则, $X^{(j)}$ 为 $(j+1)$ th 状态。重复这一过程直至达到所需的样本数目 M 。

2.2 $f^*(X)$ 的选取 $f^*(X)$ 控制了马氏链样本模拟中点与点之间的转移过程, 文献[5]的研究表明, $f^*(X)$ 的类型对算法的影响不大, 因而可以引入有利于计算的 $f^*(X)$ 。本文引用 n 维均匀分布的 $f^*(X)$, 为

$$f^*(X) = \begin{cases} \frac{1}{n \prod_{i=1}^n l_i} & |x_i - x_i^c| \leq l_i/2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

式中: l_i 为由 x_i 构成的高阶矩形的边长,它决定了下一样本偏离当前样本的最大允许距离,影响着样本覆盖区域的大小。

选取 l_i 如下

$$l_i = 6 \sqrt{i} M^{-1/(n+4)} \quad (6)$$

式中: n 为变量数; M 为马氏链步长,即模拟样本数; i 为取基本随机变量的标准方差。

2.3 状态点的产生 由舍选法,设随机变量 x_i 在闭区间 $[a, b] = [x_i^{(j)} - l_i/2, x_i^{(j)} + l_i/2]$ 上取值,其概率密度函数在 $[a, b]$ 上有界,记 $f_0 = \sup_a^b f^*(x) = 1/\sum_{i=1}^n l_i$, 取 $[0, 1]$ 上均匀分布的 R 的两个随机数 r_1, r_2 , 由于

$$f_0 r_2 \leq f^*[(b-a)r_1 + a | X^{(j)}] \quad (7)$$

恒成立,则

$$x_i = (b-a)r_1 + a = l_i r_1 + x_i^{(j)} - l_i/2 \quad (8)$$

为随机变量 x_i 的一个抽样值。如此重复使用式(8),可获得新的状态点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。

2.4 马氏链样本模拟重要样本法的基本步骤 根据上述基于马尔可夫链样本模拟重要样本法的思想,可以方便实现程序化,其基本算法如下。

- (1) 根据马尔可夫链样本模拟算法在失效域内产生 M 个模拟样本 $x^{(j)}$ 。
- (2) 计算模拟样本在各维随机变量方向上的均值 μ_i 和方差 σ_i

$$\mu_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M x_i^{(j)}, \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M [x_i^{(j)} - \mu_i]^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

- (3) 选取与随机变量具有相同形式的密度函数作为重要样本法的抽样函数。
- (4) 以马氏链模拟样本的均值 μ_i 为抽样中心,在 $3\sigma_i$ 区间内结合重要样本抽样技术进行抽样,根据式(2)即可获得失效概率 P_f 。

2.5 具有非线性极限状态方程的串联系统示例 极限状态方程为

$$g(x) = \min(g_1, g_2); g_1(x) = c - 1 - x_2 + \exp\left(-\frac{x_1^2}{10}\right) + \left(\frac{x_1}{5}\right)^4; g_2(x) = \frac{c^2}{2} - x_1 x_2 \quad (10)$$

式中: c 为常数,分别取 $c=3, 4, 5$; x_1, x_2 为随机变量, x_1 和 x_2 相互独立,且服从标准正态分布。

表1 系统失效概率的精确值

	$c=3$	$c=4$	$c=5$
系统失效概率 P_f	2.53E-3	6.81E-5	6.97E-7

由文献[5]可知,此串联系统在离开原点相同距离处

存在两个设计点,分别为 $x_1^* = (0, c)$ 和 $x_2^* = (c/\sqrt{2}, c/\sqrt{2})$, 系统失效概率的精确值参见表1。

选取点(5, 5)作为马氏链样本模拟的初始状态,链长 $M=1400$,对于不同的 c 值,得到的马氏链模拟样本分布如图1所示。

由图1可知,马尔可夫链模拟样本自适应地得到了失效概率较大的区域,即位于理论设计点 $x_1^* = (0, c)$ 和 $x_2^* = (c/\sqrt{2}, c/\sqrt{2})$ 处的重要区域。

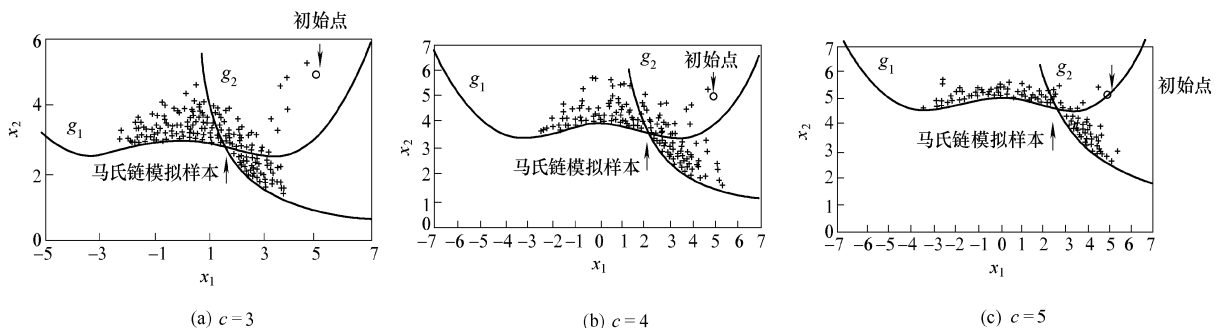


图1 c 取不同值时马尔可夫链模拟样本分布

为了说明本文算法的效率与精度,选取不同的马氏链步长 M 和重要样本模拟次数 N ,计算系统的失效概率 P_f ,所得的计算结果见表 2。

表 2 不同 M 和 N 组合所得到的系统失效概率

c	M	N				P_f 精确值
		1000	2000	5000	10000	
3	500	2.96E-03	2.78E-03	2.62E-03	2.55E-03	2.53E-3
	1000	3.05E-03	2.86E-03	2.61E-03	2.54E-03	
	1500	2.53E-03	2.55E-03	2.40E-03	2.46E-03	
4	500	8.43E-05	7.89E-05	7.87E-05	7.56E-05	6.81E-5
	1000	8.99E-05	8.35E-05	7.95E-05	7.57E-05	
	1500	7.32E-05	7.23E-05	7.07E-05	7.03E-05	
5	500	5.24E-07	5.61E-07	5.14E-07	5.49E-07	6.97E-7
	1000	5.35E-07	6.14E-07	5.49E-07	5.96E-07	
	1500	7.53E-07	7.14E-07	7.07E-07	7.26E-07	

由表 2 可知,当马尔可夫链步长 $M=1500$,重要样本的模拟次数 $N=5000$,用本文方法分别计算 $c=3,4,5$ 时所得到的系统失效概率为 $2.40E-03,7.07E-05$ 和 $7.07E-07$,与精确值相比,其相对误差分别为 $5.1\%,3.8\%$ 和 1.4% ,可见,本文算法具有较高的精度和效率,适合于计算串联系统的失效概率。

上述分析表明,模拟样本 $\{X^{(i)}\}$ 将根据最优样本密度自适应地得到 D 中重要区域^[7]。特别是当 $c=0$ 时,所有点均位于安全区域内,对上述算法验算也可证明获得的样本点均位于失效域内。因为下一个样本是由以当前样本为中心的 PDF 模拟产生的,而不是由以一个固定点为中心的 PDF 模拟产生,所以其具有自适应性和鲁棒性。由于样本不仅会以较高的概率“爬山”搜索,到达概率密度较高区域,而且也会以一定的非零概率“下山”搜索,所以只要样本和全局设计点区域存在充分地联接,则它就不会局限于局部设计点区域,而以一种很自然的方法覆盖了多个设计点区域。

3 渡槽结构系统可靠性分析

南水北调中线工程某渡槽为单排架矩形钢筋混凝土梁式渡槽,每跨长 40.90m ,槽深 5.80m ,过水断面宽度 7.05m ,变截面侧板高 6.30m ,底板厚 50cm ,每隔 2.0m 槽顶设一拉杆,渡槽横截面如图 2 所示。支承排架高为 9.5m ,支柱中心距为 7.69m ,横梁间距 4.45m 。基础桩基承台尺寸为 $14.09\text{m} \times 6.60\text{m} \times 2.50\text{m}$ 。槽身排架采用 C20 混凝土,基础承台采用 C15 混凝土,校核水位 $H=5.39\text{m}$,最大风速 $V_0=28.28\text{m/s}$,风荷载体型系数满槽时 $K=1.3$,风压高度变化系数 $K_z=0.8$ 。

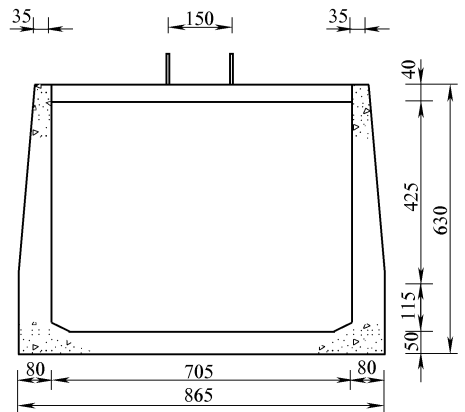


图 2 横断面尺寸(单位:cm)

3.1 荷载和抗力的不确定性分析 作用在渡槽上的主要荷载有结构自重、水重、水压力(静水压力)、人群荷载、施工荷载、风荷载以及地震荷载等。在仅考虑基本荷载组合工况,即结构自重+水重+水压力+风荷载的情况下,本文取渡槽水深 H 、最大风速 V_0 、预应力钢筋的抗拉强度标准值 f_{pyk} 、普通钢筋的强度标准值 f_{yk} 和混凝土轴心抗压强度 f_{ck} 为随机变量,其它作为定值考虑。随机变量的统计特征值见表 3,均为标准正态分布。

表 3 基本随机变量统计特征

	H/m	$V_0/(\text{m/s})$	f_{pyk}/MPa	f_{yk}/MPa	f_{ck}/MPa	
					槽身和排架	基础承台
均值	5.39	28.28	1.2	34×10^{-3}	3.60×10^{-3}	2.05×10^{-3}
变异系数	0.05	0.193	0.15	0.15	0.15	0.15

3.2 渡槽结构单个破坏模式可靠度计算 渡槽结构的失效可能存在于槽身、支承结构(排架)和基础^[9]。通过分析,获得渡槽结构的拉杆抗拉、侧板抗弯、底板偏心抗拉、槽身抗弯、排架抗压、排架横梁抗弯、基础承台抗弯 7 种主要破坏模式的功能函数如下。

拉杆抗拉:

$$Z_1 = 0.001017f_{yk} - 0.42H^2 + 1.46H - 0.0000215V_0^2 + 1.82 \quad (11)$$

侧板抗弯:

$$Z_2 = 0.005548f_{yk} - 0.01755H^3 - 8.70H - 0.0005704V_0^2 - 10.82 \quad (12)$$

底板偏心抗拉:

$$Z_3 = 0.003034f_{yk} - 0.7106H^2 - 1.46H - 0.0001702V_0^2 - 1.82 \quad (13)$$

槽身抗弯:

$$Z_4 = 0.3727f_{pyk} - 0.002551\frac{f_{pyk}^2}{f_c} - 1410H - 6682.8 \quad (14)$$

排架抗压:

$$Z_5 = 0.01767f_{yk} + 1.327f_c - 144.17H - 0.006861V_0^2 - 734.50 \quad (15)$$

排架横梁抗弯:

$$Z_6 = 0.002219f_{yk} - 0.01606V_0^2 - 8.49 \quad (16)$$

基础承台抗弯:

$$Z_7 = 0.1322f_{yk} - 136.96H - 0.007353V_0^2 - 711.835 \quad (17)$$

按上述极限状态方程及其相应随机变量的统计分布,分别采用JC法程序和重要样本法求得各极限状态方程对应的可靠度指标与失效概率见表4。

表4 渡槽结构单个破坏模式的可靠度计算结果

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7
JC法	6.1031	4.492	4.6375	4.3424	4.2985	4.2300	4.5005
P_f	5.222E-10	3.531E-6	1.765E-6	7.053E-6	8.602E-6	1.169E-5	3.393E-6
本文方法	5222E-10	3.531E-6	1.765E-6	7.053E-6	8.602E-6	1.169E-5	3.393E-6

3.3 渡槽结构系统可靠度计算 由于上述任何一种破坏模式的出现均会导致渡槽系统被破坏,因此破坏模式之间可以看作是串联。拉杆失效概率很小,不必参加系统可靠度计算,剩余的6项失效模式的串联系统的失效概率为

$$P_f = P(Z_2 < 0 \quad Z_3 < 0 \dots \quad Z_7 < 0) \quad (18)$$

采用本文方法、PNET法^[4]、一般界限法和窄界限法计算得到渡槽的结构系统失效概率如表5。

表5 渡槽系统的失效概率

本文方法	PNET法	一般界限法	窄界限法
1.9031×10^{-5}	2.0291×10^{-5}	1.691×10^{-5}	1.6978×10^{-5}
		P_f	P_f
		3.6034×10^{-5}	2.0292×10^{-5}

由表5可以看出,本文方法所得结果介于一般界限法和窄界限法之内,与PNET法较为接近,是合理可信的。

4 结语

对渡槽这类复杂结构的可靠度,本文所选的7个失效模式体现了梁式渡槽主要的失效形式,各构件及系统的失效概率可作为梁式渡槽可靠度量度的参考。基于马氏链样本模拟的重要样本法在渡槽结构系统可靠性分析中的应用表明,在合适的马氏链步长M和相对较少的重要抽样次数N的条件下,可获得较高的计算精度和效率,与一般的重要样本法和其它的方法相比,此方法尤其适合多个相关模式的系

统可靠性计算,所得结果对南水北调及其它跨流域调水工程渡槽结构可靠度计算具有参考价值,所提方法也可应用于其它结构可靠度的计算。

参 考 文 献:

- [1] 郭宗闵. 水工建筑物[M]. 北京:水利电力出版社,1995.
- [2] 汪新宇,张翔,赖国伟. 防洪体系超标洪水综合风险分析[J]. 水利学报,2004,(2):83 - 87.
- [3] 程卫帅,陈进. 相关性对结构系统可靠度的影响[J]. 长江科学院学报,2003,23(3):24 - 26,31.
- [4] 赵国藩,金伟良,贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2000.
- [5] Au S K,Beck J L. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations[J]. Structural Safety,1999,(21):135 - 158.
- [6] 康立山,谢云,尤矢勇,罗祖华. 非数值并行算法[M]. 北京:科学出版社,1994.
- [7] 施仁杰. 马尔可夫链基础及其应用[M]. 陕西:西安电子科技大学出版社,1992.
- [8] 吴剑国,吴亚柯,刘从军. 基于模拟退火算法的潜艇结构系统可靠性计算[J]. 海洋工程,2003,(3):24 - 28.
- [9] SL/T191-1996,水工钢筋混凝土结构设计规范[S].

System reliability analysis of aqueduct structure based on Markov chain sample simulation

WU Jian-guo^{1,2}, JIN Wei-liang², ZHANG Ai-hui², WANG Sheng²

(1. Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China; 2. Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: An adaptive important sampling methodology is proposed to calculate the structural system reliability of aqueducts. To populate the region of higher probability for a large variety of shapes of the failure region, the preparative sampling technique is processed in which the Markov simulation samples are simulated according to Metropolis criterion. An important sampling function is then constructed from the information of the higher probability region. The typical failure modes and reliability of a typical beam type aqueduct are analyzed. The system reliability of the aqueduct is discussed by using the proposed method and other methods. The comparison indicates that this method is precise, efficient, having good robustness and has the advantage of making an important sampling function because no related concept of design viewpoint is involved. This method can be used to calculate the system reliability of other types of structure.

Key words: system reliability; technique of important sampling; Markov chain simulation samples; aqueduct; failure modes

(责任编辑:王冰伟)