ISSN 1000-0054 清华大学学报 (自然科学版) 2002 年 第 42 卷 第 6 期 35/38
CN 11-2223/N J Tsinghua Univ (Sci & Tech), 2002, Vol. 42, No. 6 839-842

有限元可靠度分析中随机场离散方法

林道锦, 秦 权

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 用随机场模型描述随机结构参数的空间变异特征, 讨论了可靠度随机有限元分析中随机场的离散方法。提出了选择随机场离散方案的 4 个基本要求; 利用线性回归理论建立基于优化的随机场离散方法。该文采用的离散方法独立于有限元的单元离散过程, 并适用于非正态随机场。分析表明: 线性回归理论建立的随机场离散方案比其他方法有更大的灵活性和更高的效率。

关键词: 可靠度; 随机有限元; 随机场; 线形回归理论

中图分类号: TB 114; TU 312 **文献标识码**: A

文章编号: 1000-0054(2002)06-0839-04

Random field discretization method for finite element reliability analysis

LIN Daojin, QIN Quan

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Random field discretization was used to analyze stochastic structures with spatially random properties. Four criteria were considered in the choice of the random field discretization method. A systematic method based on linear regression theory was chosen which minimized the error of the discretized field relative to its real field for non-Gaussian fields. The random field discretization process can be done independently from the finite element discretization process. Examples show that this method is more efficient and flexible than other discretization methods for finite element reliability analyses.

Key words: structural reliability; stochastic finite element; random field; linear regression theory

随机结构理论是研究结构模型不确定因素的概率方法, 结构可靠度研究及结构反应变异分析都属于这个范畴。随机有限元理论在结构建模时保留了结构参数和外部作用的随机信息, 而将可靠度分析计算建立在有限元模型的基础上, 为可靠度理论的工程应用开拓了广阔的市场。

大多数随机有限元分析中, 首先需要将连续随机场用随机变量向量来表示, 这个过程即所谓的随机场离散。在过去的研究过程中已经提出了各种随机场离散方法[1], 他们包括: 中点法; 局部平均法; 形函数法; 级数展开法; 加权积分法等, 而其中任一种离散方法对其他方法都没有绝对的优势, 随机场离散方法的最终选择必须在精度与效率之间找到一个均衡点。将优化的思想引入随机场离散过程, 是近几年的研究趋势, 用最优形函数法随机场离散便是对形函数法进行优化的结果。线性回归理论属于随机变量最优估计问题, 将这一思想用于随机场离散可得到比最优形函数法更普遍的结果, 本文证明了他们之间的一致性, 并在此基础上得到可处理非正态随机场、且与有限元离散过程独立进行的随机场离散方案。

1 随机场离散

1.1 随机场离散基本要求

随机场离散方法的选择应考虑以下 4 个因素:

1) 是否便于在有限元程序中实现。随机有限元程序的开发应尽量利用现有比较成熟的有限元标准程序, 这样就要求离散后的结构随机参数表达式不宜太复杂;

2) 在满足离散精度情况下, 随机变量个数应尽量少。随机分析有比确定性结构分析大的多得计算工作量, 因此在同样精度下, 随机变量少的离散方法应优先选择, 这就是随机场的效率;

3) 是否有处理非高斯随机场的能力。结构参数具有非负性, 正态分布假定在结构变异性较大时会出现结构参数为负值的不合理结果。此外, 多数荷载和抗力的分布都是非正态的;

4) 随机场的离散精度主要受随机场的相关长度控制, 这与确定有限元分析的单元离散的原则有

收稿日期: 2001-05-08

作者简介: 林道锦(1976-), 男(汉), 福建, 博士研究生。

通讯联系人: 秦权, 教授, E-mail: qq-dci@tsinghua.edu.cn

明显区别, 因此需要建立一种独立于有限元离散过程的随机场离散方案。

以上 4 点要求可作为评价随机场离散方法是否可行的标准。本文采用方法的基本思路是: 利用 Ditlevsen 提出的线性回归理论[2], 以随机场空间中的指定位置的随机变量来对其他位置的随机量进行最小方差估计, 经分析发现该方法完全可以满足以上几点对随机场离散方法的要求。

1.2 线性回归方法

设有两组随机变量向量(X, Y), 建立 X 的线性函数, 以形成 X 对 Y 的最优估计。即求:

$$\widehat{E}[Y|X] = A + BX, \tag{1a}$$

使

$$E[\widehat{E}[Y|X]] = E[Y], \tag{1b}$$

$$\min E[(\widehat{E}[Y|X] - Y)^2], \tag{1c}$$

式中: A 与 B 为待定系数矩阵; $E[\ ]$为数学期望算子。通过极小值运算可求得:

$$B = \mathrm{cov}[Y, X^{T}]\mathrm{cov}[X, X^{T}]^{-1}, \tag{2a}$$

$$A = E[Y] - BE[X], \tag{2b}$$

式中: cov 为向量协方差; $(\ )^{T}$ 为向量转置; $(\ )^{-1}$为矩阵求逆。将(2)式代入(1)式得:

$$\widehat{E}[Y|X] = E[Y] + \mathrm{cov}[Y, X^{T}]\mathrm{cov}[X, X^{T}]^{-1}(X - E[X]). \tag{3}$$

1.3 随机结构控制方程

设材料参数及分布荷载存在空间变异性, 并假定他们为平稳过程随机场, 即结构或荷载参数空间任意位置服从相同的概率分布, 且随机场间的相关系数为 $\rho(\tau)$, 其中 τ 为随机场两点间的空间距离, 令随机场标准差为 $\sigma(x)$。

有限元理论的结构平衡方程为

$$Kq = P, \tag{4}$$

式中: K 为结构总刚度系数矩阵; P 为荷载向量; q 为节点位移反应。对于杆系结构 K 与 P 中的系数为

$$k_{ij}^{e} = \int C(x)B_i(x)B_j(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5a}$$

$$P_i^{e} = \int q(x)N_i(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5b}$$

式中: $B(x)$ 与 $N(x)$ 为空间局部坐标 x 的多项式; $C(x)$ 为结构参数, 如: 截面抗弯刚度 EI, 抗扭刚度 GI_{T}, 轴向刚度 EA (其中 E 为弹性模量); $q(x)$ 为作用在结构上的分布荷载, 在随机结构分析中 $C(x)$ 和 $q(x)$ 均为随机场。下文用统一的符号 $v(x)$ 表示随机场。随机场两点间的协方差为

$$\mathrm{cov}[v_i, v_j] = \rho(\tau)\sigma(x)^2. \tag{6}$$

随机场离散目的是为了将连续参数随机场用随机变量向量来表示。将线性回归公式应用于任意分布随机场的离散时, 可采用以下步骤:

1) 在随机场空间上选择 n 个离散点 v_i ($i = 1, \cdots, n$), 并且可得到离散点 v_i 的均值 μ_i 及他们之间的协方差矩阵 $\mathrm{cov}[v_i, v_i']$;

2) 随机场在空间任意位置 x 的均值为 $\mu(x)$, $v(x)$ 与 v_i 的协方差为 $\mathrm{cov}[x, v_i']$ ($i = 1, \cdots, n$)。用式(3)可得到 v_i ($i = 1, \cdots, n$) 对 $v(x)$ 的最优线性估计:

$$\hat{v}(x) = a(x) + \sum_{i=1}^{n} b(x)_i(v_i - \mu_i), \tag{7}$$

式中:

$$a(x) = \mu(x);$$

$$b(x)_i = \left.\{\mathrm{cov}[v(x), \bar{v}^{T}]\mathrm{cov}(\bar{v}, \bar{v}^{T})^{-1}\}\right|_i;$$

$$\bar{v} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}^{T}.$$

3) 计算单元随机刚度系数及随机荷载系数。将式(7)代入式(5)得:

$$k_{ij} = \bar{k}_{ij} + \sum_{l=1}^{n} k_{ij}^{l}(v_l - \mu_l), \tag{8a}$$

$$P_i = \bar{P}_i + \sum_{l=1}^{n} p_i^{l}(v_l - \mu_l), \tag{8b}$$

式中:

$$k_{ij}^{l} = \int B_i(x)B_j(x)b_l(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8c}$$

$$p_i^{l} = \int N_i(x)b_l(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8d}$$

得到单元随机刚度系数及随机荷载系数后, 经过坐标转化并拼装到总刚度阵和荷载右端项中, 可形成带随机变量的结构控制方程。

1.4 讨 论

1) 式(7)与文[3]提出的最优形函数法表达式完全相同, 因为最优形函数法对形函数的优化标准正是式(1)。文[3]分析表明: 用式(7)离散随机场效率仅次于 Karhunen-Loeve 分解[4], 而优于中点法、局部平均法、形函数法等其他方法, 且实现过程比 Karhunen-Loeve 分解法简单。本文方法还可处理多维相关随机场, 只需让不同随机场离散变量服从一定相关模型即可。这就满足了效率与精度的要求。

2) 文[3]仅将表达式用于正态分布随机场, 对于非正态分布则需要利用 Nataf 分布。而在本文利用线性回归理论进行推导时, 并没有进行任何概率分布假定, 式(7)中的随机变量 v_i 仍可保持原有概率分布。因此上述过程完全适用于非正态分布随机场, 这就满足了概率分布要求。

3) 从 1.3 节讨论的随机结构控制方程形成过程来看, 随机场离散过程与单元离散并不相互影响, 两者完全可以单独进行。这就满足了 1.1 节所提出的第 4 点要求。由于离散点可自由选择, 这就为研究者依据随机场特征和结构特点灵活选用离散方案提供更自由的空间。

2 有限元可靠度分析

2.1 可靠度算法

可靠度分析主要目的是为了计算失效概率, 即求:

$$P_f = P[G(S, R) \le 0] = P[G(v) \le 0]. \quad (9)$$

由基本变量及功能函数定义了一个失效空间, 失效概率的求解在数学上可定义为基本变量在失效空间(式(9))的概率函数积分:

$$P_f = \int \cdots \int_{\le 0} f(x) \mathrm{d}x, \quad (10)$$

式中: $f(x)$ 为基本变量的联合概率分布。

在实际应用中, 首先计算功能函数曲面上的最大概率可能点(验算点), 将功能函数曲面在验算点进行一次或二次展开(近似)。当功能函数为线性或二次函数, 且基本变量为标准正态分布时, 积分式(10)有精确解。因此可靠度分析最核心的计算问题是的验算点的迭代求解。

有两种途径可计算验算点, 即零次法(ZOM)和一次法(FOM)。零次法不需要计算功能函数对基本变量的梯度, 如响应面法; 后者相反, 如 HL-RF 算法、SQP 法等。本文的验算点计算采用 HL-RF 算法。HL-RF 迭代算法基本公式为[5]:

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \frac{[\nabla G(\boldsymbol{u}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_k - G(\boldsymbol{u}_k)]\nabla G(\boldsymbol{u}_k)}{|\nabla G(\boldsymbol{u}^k)|^2}, \quad (11)$$

式中: u 为独立标准正态分布向量; ∇ 为功能函数对基本变量的梯度算子。

2.2 梯度分析

基于有限元模型的功能函数可表示为

$$G = G[q(v), v], \quad (12)$$

式中: v 代表基本随机变量向量; $q(v)$ 为结构响应, 它为基本变量的函数, 通过有限元分析得到。

验算点 HL-RF 迭代法是在独立标准正态变量前提下进行, 所以还需将任意分布相关随机变量 v 转换为独立标准正态分布变量 u。

$$v = F^{-1}[\Phi(Lu)], \quad (13)$$

式中: F^{-1} 为 F 的逆函数, F 为基本变量的分布函数; Φ 为标准正态分布的分布函数; L 为随机变量向量相关系数矩阵的 Cholesky 分解下三角阵。

功能函数对独立标准正态变量 u_k 的梯度为

$$\nabla G_k = \frac{\partial G}{\partial u_k} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial u_i}, \quad (14)$$

式中: $\frac{\partial G}{\partial u_k}$ 和 $\frac{\partial G}{\partial q_i}$ 可对式(12)直接偏微分得到; $\frac{\partial v_i}{\partial u_i}$ 可对式(13)偏微分得到; $\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ 通过下式求解:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = K^{-1}\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x}q\right]. \quad (15)$$

式(15)可通过对随机控制方程(式(4))两端对基本变量偏微分得到。由公式(8), K 和 P 均为基本变量 x 的线性函数, 所以刚度梯度和荷载梯度可在拼装总刚和荷载过程中直接得到。

3 算例分析

设有两端固定梁, 梁长为 12.2 m, 外荷载为随机均布荷载 $q(x)$, 如图 1 所示。

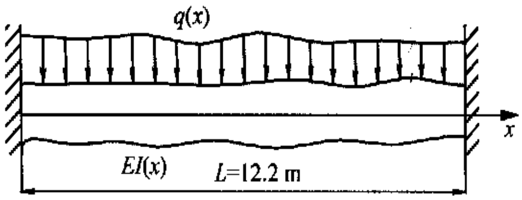

图 1 随机刚度梁

由于结构在使用阶段受到损伤, 结构断面的抗弯刚度产生变异, 因此荷载和结构抗弯刚度均为随机场, 设随机场相关模型为指数模型, 概率分布服从对数正态分布, 且荷载随机场与刚度随机场互不相关, 即结构模型如表 1 所示。

表 1 随机梁参数

变量	均 值	变异系数	相关长度
$EI(x)$	450.4 MN·m^2	0.1	0.5L
$q(x)$	116.75 kN·m^{-1}	0.2	0.5L

随机场指数相关模型的相关系数表达式为

$$\rho(x_1, x_2) = \exp(-|x_1 - x_2|/d), \quad (16)$$

式中: d 为随机场相关长度; L 为梁长。

定义两种极限状态: 1) 跨中最大容许挠度为 24.25mm; 2) 梁端最大容许弯矩为 2 033.6MN·m。

用有限元法分析, 将梁分为 16 个单元, 并在随机场上取若干个等间距离散点, 计算可靠度指标 β。β 与失效概率的关系为: $P_f = \Phi(-\beta)$。可靠性指标与离散点个数的关系见图 2。

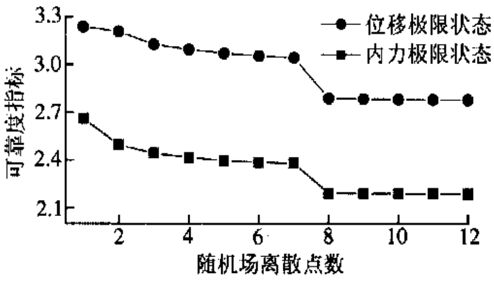

图 2 可靠性指标与离散点个数关系

由于线性回归理论估计的随机变量方差偏小[8], 用线性回归理论离散随机场会使可靠度计算结果偏大, 见图 2。当离散点数量达到一定值时计算结果趋于稳定。

验算点在可靠度分析中的物理意义为基本变量在极限状态下的最可能状态。本文采用的是随机场模型, 在上述两个极限状态下, 最大可能荷载模式和截面刚度模式分别见图 3、图 4。

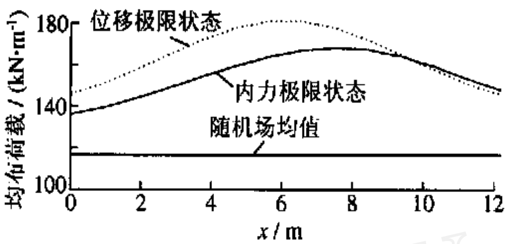

图 3 极限状态下最大可能荷载模式

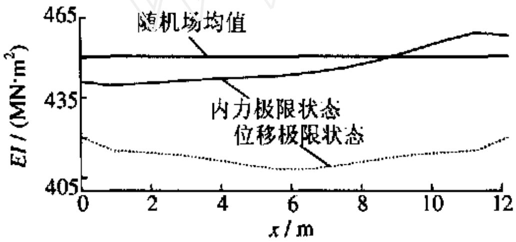

图 4 极限状态下最大可能截面刚度模式

4 小 结

随机有限元技术将可靠度基本理论与有限元分析结合起来, 可用于处理复杂随机结构系统以及结构参数的空间变异性影响。随机场模型用于描述结构参数和荷载的空间变异性。随机场离散不仅要考虑精度, 还考虑效率、非正态适应性等。算例结果表明: 利用线性回归理论发展的离散方案可满足上述要求。

参考文献 (References)

[1] Schueller G L. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics [J]. *Probabilistic Eng Mech*, 1997, **12**(4): 199－321.

[2] Ditlevsen O. Dimension reduction and discretization in stochastic problems by regression method [A]. Mathematical Models for Structural Reliability Analysis [C]. Casciati F, Roberts B. CRC Press Inc, 1996: 51－138.

[3] LI C C, Der K A, Optimal discretization of random fields [J]. *J Eng Mech, ASCE*, 1993, **119**(6): 1136－1154.

[4] Ghanem R G, Spanos P D. Spectral stochastic finite element formulation for reliability analysis [J]. *J Eng Mech, ASCE*, 1991, **117**(10): 2351－2372.

[5] Ditlevsen O, Madsen H O. Structural Reliability Methods [M]. John Wiley & Sons Ltd, 1996.

(上接第 834 页)

3 结 论

1) 带缺口受拉平板三维应力场简化公式在描述裂纹尖端区域的应力状态具有良好的精确度, 且易于使用, 有较高的应用价值;

2) 在复杂应力应变状态下, 裂纹尖端常处于三向受拉状态, 容易形成平面应变状态, 塑性发展受到限制, 极易发生脆性破坏。

参考文献 (References)

[1] 胡传析. 断裂力学及其工程应用 [M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1974.
HU Chuanxi. Fracture Mechanics and Its Engineetring Application [M]. Beijing: Beijing Tech Uni Press, 1974. (in Chinese)

[2] Neuber H. Kerbspannungslehre [M]. Berlin: Springer, 1937.

[3] 王元清. 钢结构在低温下脆性破坏研究 [J]. 低温建筑技术, 1998, (2): 2－4.
WANG Yuanqing. On brittle fracture of steel structure under low temperature [J]. *Low Temp Archi Tech*, 1998, (2): 2－4. (in Chinese)

[4] WANG Yuanqing. The Quantitative Evaluation of the Strength of the Elements of Steel Structures with the View of Brittle Fracture [D]. Dnepropetrovsk, Ukrine: Civil Engineering Insiture, 1993. (in Russian)

[5] 王元清. 钢结构低温冷脆现象的实验研究方法 [J]. 低温建筑技术, 1998, (3): 8－10.
WANG Yuanqing. Experimental investigation methods of the brittle fracture of steel [J]. *Struc under Low Temp*, 1998, (3): 8－10. (in Chinese)

[6] 王元清. 钢结构构件在高应力集中区脆性破坏倾向性 [J]. 工程力学, 1995, 3: 132－138.
WANG Yuanqing. The tendency of brittle fracture in stress concentration zone of the element of steel structure [J]. *Eng Mech*, 1995, **3**: 132－138. (in Chinese)