文章编号:1001-3997(2007)04-0006-02

联接件的可靠性灵敏度设计*

刘巧伶 (吉林大学 南岭校区机械科学与工程学院，长春 130025)

Reliability Sensitivity of Joints

LIU Qiao-ling
(College of Mechanical Science and Engineering, Nanling Campus, Jilin University, Changchun 130025, China)

【摘 要】在联接件的可靠性设计的基础上，提出了可靠性灵敏度设计的计算方法，研究了正态分布设计参数的改变对联接件可靠性的影响，为联接件的可靠性设计提供了理论依据。

关键词：联接件;可靠性灵敏度;正态分布参数

【Abstract】 A numerical method for the reliability sensitivity of joints is presented on the basis of the reliability-based design. The effects of normally distributed design parameters on reliability of the joints are studied. The method presented in this paper provided the theoretic basis for the reliability design of the joints.

Key words: Joints; Reliability sensitivity; Normal distribution parameters

中图分类号：TH133　文献标识码：A

为满足生产工艺的要求，并考虑到制造、运输、安装、检修工作的方便，大量设备往往做成可拆结构，联接件是可拆结构中使用最为普遍的型式。在联接件的设计中，存在着许多理论分析问题，可靠性设计和可靠性灵敏度设计无疑是重要的问题之一。可靠性设计[1-3]，是运用概率统计理论和优化方法设计联接件的某一或某些设计参数；可靠性灵敏度设计，是在可靠性基础上进行灵敏度设计，给出设计参数的变化对系统可靠度的影响。联接件可靠性灵敏度设计在可靠性设计和修改、可靠性优化设计、可靠性维护等方面均有重要的应用。本文采用摄动方法、可靠性设计方法和灵敏度分析方法讨论了联接件的可靠性灵敏度设计问题。在基本随机变量的概率特性已知的情况下，可以迅速准确地得到联接件的可靠性灵敏度设计信息，为分析和修改联接件的可靠性水平提供了理论依据。

1 联接件的力学模型

根据 Bach 方法，采用拟梁结构模型，可求得联接件在 D_1 直径上，即危险截面处的弯应力为

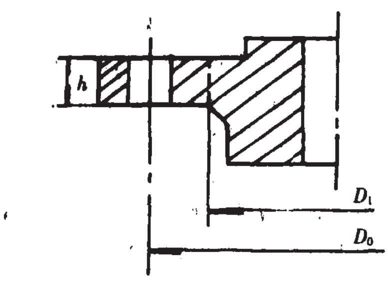

图 1 机械联接件结构
Fig.Machinery Joints

$$\sigma=\frac{3P(D_0-D_1)}{\pi D_1 h^2} \qquad (1)$$

式中 P 为联接件受力的总和，D_0 为螺钉分布圆的直径，D_1 为危险截面的直径，h 为联接件的厚度。

根据应力-强度干涉理论，以应力极限状态表示的状态方程为

$$g(X)=r-\sigma \qquad (2)$$

式中 r 为联接件的材料强度，基本随机变量向量 X 为 $X=(r\ D_0\ D_1\ h\ P)^T$。这里基本随机变量向量 X 的均值 $E(X)$ 和方差 $Var(X)$ 是已知的，并且可以认为这些随机变量是服从正态分布的相互独立的随机变量。$g(X)$ 为状态函数，可表示联接件的两种状态

$$\begin{cases} g(X)\le 0 & \text{为失效状态} \\ g(X)>0 & \text{为安全状态} \end{cases} \qquad (3)$$

这里极限状态方程 $g(X)=0$ 是一个五维曲面，称为极限状态面或失效面。

2 可靠性设计

把随机参数向量 X 和状态函数 $g(X)$ 表示为

$$X=X_d+\varepsilon X_p \qquad (4)$$

$$g(X)=g_d(X)+\varepsilon g_p(X) \qquad (5)$$

这里 ε 为一小参数，下标为 d 的部分表示随机参数中的确定部分，下标为 p 的部分表示随机参数中的随机部分，且具有零均值。显然这里要求随机部分要比确定部分小得多。对上面两式取数学期望，有

$$E(X)=\bar{X}=E(X_d)+\varepsilon E(X_p)=X_d \qquad (6)$$

$$\mu_g=E[g(X)]=\bar{g}=E[g_d(X)]+\varepsilon E[g_p(X)]=g_d(X) \qquad (7)$$

同理，对其取方差，根据 Kronecker 代数及相应的随机分析理论，有

$$Var(X)=E\{[X-E(X)]^{[2]}\}=\varepsilon^2[X_p^{[2]}] \qquad (8)$$

$$Var[g(X)]=E\{[g(X)-E(g(X))]^{[2]}\}=\varepsilon^2 E\{[g_p(X)]^{[2]}\} \qquad (9)$$

式中 $(\cdot)^{[2]}=(\cdot)\otimes(\cdot)$ 为 $(\cdot)$ 的 Kronecker 幂，符号 $\otimes$ 代表 Kronecker 积，定义为 $(A)_{p\times q}\otimes(B)_{s\times t}=[a_{ij}B]_{ps\times qt}$。

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式，当随机参数的随机部分比其确定部分小得多时，可以把 $g_p(X)$ 在 $E(X)=X_d$ 附

* 来稿日期：2006-09-27　*基金项目：国家自然科学基金(50175043)，吉林大学创新基金

近展开到一阶为止，有

$$g_p(X)=\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^{\mathrm{T}}}X_p \tag{10}$$

矩阵导数定义为 $\partial(A)_{p\times q}/\partial(B)_{s\times t}=(\partial A/\partial b_{ij})_{ps\times qt}$。把式(10)代入式(9)，有

$$\sigma_g^2=\mathrm{Var}[g(X)]=\left(\frac{\partial g_d(X)}{\partial X^{\mathrm{T}}}\right)^{[2]}\mathrm{Var}(X) \tag{11}$$

式中 $Var(X)$ 为随机参数的方差向量。

把状态函数 $g(X)$ 对基本随机变量向量 X 求偏导数，有

$$\frac{\partial g(\bar{X})}{\partial X^{\mathrm{T}}}=\left[\frac{\partial g}{\partial r}\ \frac{\partial g}{\partial D_0}\ \frac{\partial g}{\partial D_1}\ \frac{\partial g}{\partial h}\ \frac{\partial g}{\partial P}\right] \tag{12}$$

把式(12)代入式(11)，可以得到状态函数方差的表达式。可靠性指标定义为

$$\beta=\frac{\mu_g}{\sigma_g}=\frac{\mathrm{E}[g(X)]}{\sqrt{\mathrm{Var}[g(X)]}} \tag{13}$$

在基本随机参数向量 X 服从正态分布时，可以获得可靠度的一阶估计量

$$R=\Phi(\beta) \tag{14}$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

3 可靠性灵敏度设计

联接件的可靠度对基本随机参数向量 X 均值 $\mathrm{E}(X)=\bar{X}$ 和方差 $Var(X)$ 的灵敏度为

$$\frac{\mathrm{D}R}{\mathrm{D}\bar{X}^{\mathrm{T}}}=\frac{\partial R}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\mu_g}\frac{\partial\mu_g}{\partial\bar{X}^{\mathrm{T}}} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{D}R}{\mathrm{DVar}(X)}=\frac{\partial R}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_g}\frac{\partial\sigma_g}{\partial\mathrm{Var}(X)} \tag{16}$$

式中

$$\frac{\partial R}{\partial\beta}=\varphi(\beta),\ \frac{\partial\beta}{\partial\mu_g}=\frac{1}{\sigma_g},\ \frac{\partial\beta}{\partial\sigma_g}=\frac{\mu_g}{\sigma_g},$$

$$\frac{\partial\sigma_g}{\partial Var(X)}=\frac{1}{2\sigma g}\left[\frac{\sigma_{\bar{g}}}{\partial X}\otimes\frac{\sigma_{\bar{g}}}{\partial X}\right] \tag{17}$$

把已知条件和可靠性计算结果代入式(15)和式(16)，就可以获得可靠性灵敏度 $DR/D\bar{X}\,T$ 和 $DR/DVar(X)$。

4 数值算例

设某一联接件的几何尺寸的均值和标准差为 D_0=(1200.0, 6.0) mm，D_1=(1000.0,5.0)mm，h=(50.0,0.25)mm，联接件承受的载荷的均值和标准差为 P=(1.3×10⁶,1.2×10⁵)N，材料强度的均值和标准差为 r=(135.0,5.265)MPa。

计算得到此联接件的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度分别为

$$\beta=3.123985,\ R=0.999108$$

$$\mathrm{D}R/\mathrm{D}\bar{X}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R_{(r)}\\R_{(D_0)}\\R_{(D_1)}\\R_{(h)}\\R_{(P)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2.654\times10^{-4}\\-1.318\times10^{-4}\\1.581\times10^{-4}\\1.054\times10^{-3}\\-2.028\times10^{-8}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{D}R/\mathrm{DVar}(X)=\begin{bmatrix}R_{\mathrm{Var}(r)}\\R_{\mathrm{Cov}(r,D_0)}\\R_{\mathrm{Cov}(r,D_1)}\\R_{\mathrm{Cov}(r,h)}\\R_{\mathrm{Cov}(r,P)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_0,r)}\\R_{\mathrm{Var}(D_0)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_0,D_1)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_0,h)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_0,P)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_1,r)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_1,D_0)}\\R_{\mathrm{Var}(D_1)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_1,h)}\\R_{\mathrm{Cov}(D_1,P)}\\R_{\mathrm{Cov}(h,r)}\\R_{\mathrm{Cov}(h,D_0)}\\R_{\mathrm{Cov}(h,D_1)}\\R_{\mathrm{Var}(h)}\\R_{\mathrm{Cov}(h,P)}\\R_{\mathrm{Cov}(P,r)}\\R_{\mathrm{Cov}(P,D_0)}\\R_{\mathrm{Cov}(P,D_1)}\\R_{\mathrm{Cov}(P,h)}\\R_{\mathrm{Var}(P)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.629\times10^{-5}\\1.802\times10^{-5}\\-2.162\times10^{-5}\\-1.442\times10^{-4}\\2.772\times10^{-9}\\1.802\times10^{-5}\\-8.948\times10^{-6}\\1.074\times10^{-5}\\7.158\times10^{-5}\\-1.377\times10^{-9}\\-2.162\times10^{-5}\\1.074\times10^{-5}\\-1.289\times10^{-5}\\-8.590\times10^{-5}\\1.652\times10^{-9}\\-1.442\times10^{-4}\\7.158\times10^{-5}\\-8.590\times10^{-5}\\-5.727\times10^{-4}\\1.101\times10^{-8}\\2.772\times10^{-9}\\-1.377\times10^{-9}\\1.652\times10^{-9}\\1.101\times10^{-8}\\-2.118\times10^{-13}\end{bmatrix}.$$

式中 $R_{(\cdot)}$ 表示可靠度 R 对 $(\cdot)$ 的灵敏度。

从灵敏度矩阵 $\mathrm{DR/D\bar{X}^T}$ 可以看出，联接件的材料强度 r、几何尺寸 D_1 和 h 的均值增加，其结果将使联接件趋于更加可靠，而联接件承受的载荷 P 和几何尺寸 D_0 的均值增加，其结果将使联接件趋于更加不可靠(失效)，其变化率最大的为联接件的厚度 h，其后依次为危险截面的直径 D_1、螺钉分布圆的直径 D_0、联接件的材料强度 r，最小的为联接件的受力总和 P，也就是说，使联接件趋向可靠(或失效)的速度为几何尺寸比材料强度的大、材料强度比载荷的大。从灵敏度矩阵 DR/DVar(X) 可以看出，基本随机参数方差的增加，都会使联接件趋于更加不可靠(失效)，但基本随机参数的协方差的变化对联接件的可靠与否的影响却不尽相同。而上面的计算结果与通常的定性分析结果完全一致，如在状态函数的表达式中可以同样看出联接件的厚度是以平方速率变化的，所以其对联接件的可靠(或失效)设计是最灵敏的，这进一步说明了可靠性灵敏度矩阵对联接件各因素分析的全面性和正确性。从前面的联接件分析可得到如下结论：在联接件的设计、制造、使用和评估中，要严格控制敏感参数的变化。

5 结语

在联接件可靠性研究的基础上，提出一种计算联接件可靠性灵敏度的数值方法，有效地反映了联接件各因素对其失效的影响程度。本数值方法在随机参数前二阶矩已知的情况下，放松了对随机参数的分布概型的限制，使之更接近于工程实际中的联接件的可靠性问题。

参考文献

1 牟致忠.机械零件可靠性设计[M].北京:机械工业出版社, 1983.

2 卢玉明.机械零件的可靠性设计[M].北京:高等教育出版社, 1989.

3 胡宗武,乐晓斌.机械结构概率设计[M].上海:上海交通大学出版社, 1995.